

# 結び目の位置と曲面

小沢 誠

平成 20 年 1 月 28 日

# 目次

|       |                   |    |
|-------|-------------------|----|
| 第 1 章 | 結び目の基本構造          | 4  |
| 1.1   | 結び目補空間定理          | 4  |
| 1.2   | 結び目の幾何構造          | 5  |
| 1.3   | 結び目の標準的分解         | 10 |
| 1.3.1 | トールス分解            | 10 |
| 1.3.2 | コンウェイ球面分解         | 11 |
| 第 2 章 | 本質的曲面             | 14 |
| 2.1   | 基本的定義             | 14 |
| 2.2   | 基本的定理             | 19 |
| 2.3   | ザイフェルト曲面          | 23 |
| 2.3.1 | ザイフェルト曲面から得られる不変量 | 26 |
| 2.4   | 閉曲面               | 32 |
| 2.4.1 | タングル分解            | 34 |
| 2.4.2 | 補間曲面              | 35 |
| 第 3 章 | 結び目の位置            | 36 |
| 3.1   | 正則表示              | 36 |
| 3.1.1 | 交代結び目             | 36 |
| 3.1.2 | 正結び目              | 36 |
| 3.1.3 | モンテシノス結び目         | 36 |
| 3.1.4 | 充足結び目             | 36 |
| 3.1.5 | 均質結び目             | 36 |
| 3.1.6 | 代数的結び目            | 36 |
| 3.2   | モース関数とヒーガード分解     | 37 |
| 3.2.1 | 橋位置・細い位置          | 41 |
| 3.2.2 | ブレイド表示            | 41 |
| 3.2.3 | 結び目解消トンネル         | 41 |
| 3.2.4 | ファイバー結び目          | 41 |
| 3.3   | 局所変形              | 41 |
| 3.3.1 | 交差交換              | 41 |
| 3.3.2 | ツイスト              | 41 |
| 3.3.3 | バンド和              | 41 |
| 3.3.4 | 結び目解消操作           | 41 |

# はじめに

## ユークリッド幾何学と結び目理論

結び目理論をユークリッド幾何学と対応させて考えてみる。

ユークリッド幾何学では、ユークリッド平面  $\mathbb{R}^2$  内の三角形などの図形を対象とし、 $\mathbb{R}^2$  の合同変換で移り合うものは合同であるとみなす。基本となる不変量として、角度や長さがあり、二つの三角形  $\Delta$  と  $\Delta'$  が合同である為の必要十分条件は、以下のいずれかを満たすことである。

- 2 辺の長さとその間の角が等しい
- 1 辺の長さとその両端の角が等しい
- 3 辺の長さが等しい

結び目理論では、3 次元球面  $S^3$  内の閉曲線を対象とし、 $S^3$  の同相写像で移り合うものは同値であるとみなす。基本となる不変量として、結び目補空間の基本群があり、二つの素な結び目  $K$  と  $K'$  が同値である為の必要十分条件は、次を満たすことである ([64], [17])。

- $\pi_1(S^3 - K)$  と  $\pi_1(S^3 - K')$  が同型

また、ユークリッド幾何学での補助線の役割は、結び目理論での曲面の役割に対応すると考えられる。

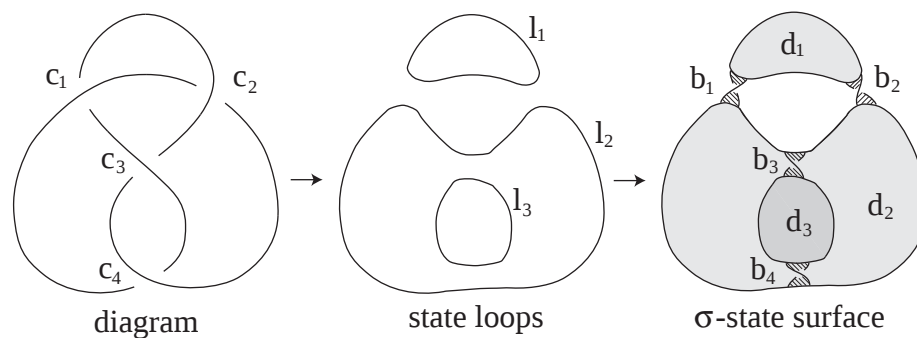
|     | ユークリッド幾何学                | 結び目理論      |
|-----|--------------------------|------------|
| 対象  | $(\mathbb{R}^2, \Delta)$ | $(S^3, K)$ |
| 変換群 | 合同変換                     | 同相写像       |
| 不変量 | 角度・長さ                    | 基本群        |
| 道具  | 補助線                      | 曲面         |

注 0.0.1. 上のような考え方は、クラインのエルランゲン目録にある『一つの幾何学は、一つの変換群によって不変な性質を研究する不変式論である。』に基づいている。

## 結び目の位置と曲面

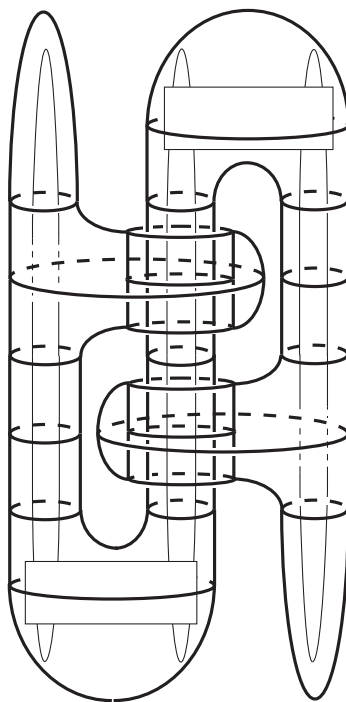
結び目を“良い位置”に配置することで、

- 曲面を作り出す。



正則表示という位置に置くことで、結び目を境界とする曲面を任意のステイトから構成することができる ([50])。

- 曲面の位置を限定する。



ある高さ関数に関して、極大点の個数が最小となるような位置に置く。更に、結び目補空間の本質的閉曲面を臨界点が最小となるようにしておく。このとき、結び目の位置から曲面の位置が制限される。図の例では、結び目の極大点が3個、閉曲面の種数が2の場合の状況が描かれている ([51])。

逆に、このような閉曲面が存在するならば、結び目の極大点の個数を2個にできないなどと、曲面の位置から結び目の位置が制限されることになる。

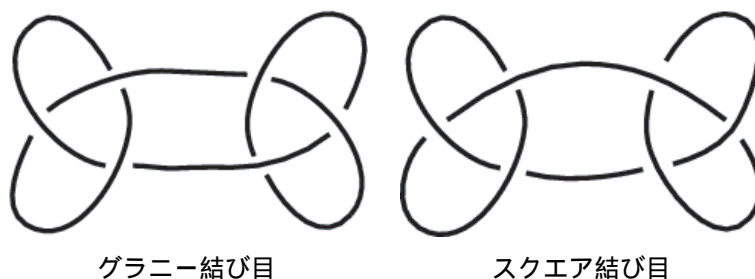
# 第1章 結び目の基本構造

## 1.1 結び目補空間定理

$K_1, K_2$  を 3 次元球面  $S^3$  内の結び目とする。  $K_1$  と  $K_2$  が同値ならば、補空間  $S^3 - K_1$  と  $S^3 - K_2$  は同相である。また、補空間  $S^3 - K_1$  と  $S^3 - K_2$  が同相ならば、結び目群  $G(K_1) = \pi_1(S^3 - K_1)$  と  $G(K_2) = \pi_1(S^3 - K_2)$  は同型である。これら二つの逆が成り立つことが知られている。

定理 1.1.1 ([64]). 素な結び目  $K_1$  と  $K_2$  に対し、  $G(K_1) \cong G(K_2)$  ならば、  $K_1 \cong K_2$  が成り立つ。

注 1.1.2. グラニー結び目  $3_1 \# 3_1$ 、スクエア結び目  $3_1 \# 3_1!$  に対し、  $G(3_1 \# 3_1) \cong G(3_1 \# 3_1!) \cong \langle x, y, z | xyx = yxy, xzx = zxz \rangle$  であるが、定理 1.2.11 より  $3_1 \# 3_1 \cong 3_1 \# 3_1!$  ではない。

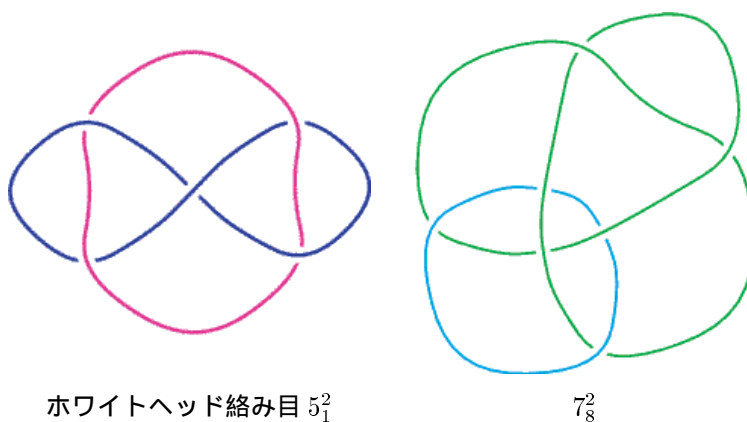


次の定理は結び目補空間定理として知られている。

定理 1.1.3 ([17]). 結び目  $K_1$  と  $K_2$  に対し、  $S^3 - K_1 \cong S^3 - K_2$  ならば、  $K_1 \cong K_2$  が成り立つ。

従って、素な結び目に対しては、結び目群が完全不変量となる。

注 1.1.4. 結び目補空間定理は、絡み目については一般に成り立たない。  $S^3 - 5_1^2 \cong S^3 - 7_8^2$  であるが、  $5_1^2 \not\cong 7_8^2$  である。



しかしながら、結び目補空間定理は、特殊な絡み目については成り立つ。

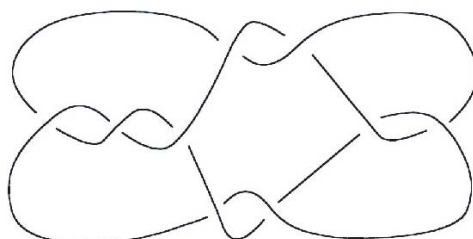
定理 1.1.5 ([32]).  $L_1, L_2$  をホモロジー的に自明かつブルニアン絡み目とする。このとき、  $S^3 - L_1 \cong S^3 - L_2$  ならば、  $L_1 \cong L_2$  が成り立つ。

ここで、絡み目  $L = C_1 \cup \cdots \cup C_n$  がホモロジー的に自明であるとは、任意の 2 成分部分絡み目  $C_i \cup C_j$  に対し、絡み数が  $lk(C_1, C_2) = 0$  であるときをいう。また、 $L$  がブルニアンであるとは、 $L$  が非自明で、かつ任意の  $i$  に対して  $L - C_i$  が自明であるときをいう。

## 1.2 結び目の幾何構造

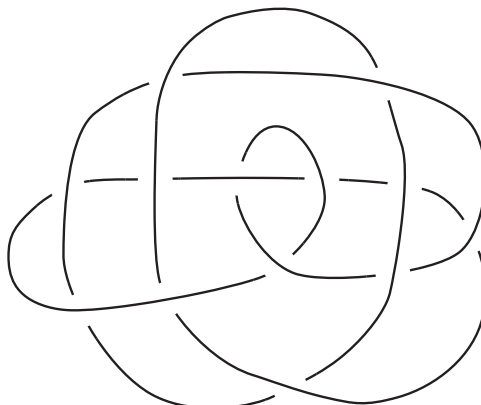
定義 1.2.1.  $K$  が自明な結び目であるとは、ディスク  $D \subset S^3$  が存在して、 $\partial D = K$  を満たすときをいう。

例 1.2.2. ライデマイスター変形で交点数を単調に下げることが出来ない自明な結び目の正則表示が存在する ([11])。



Goeritz の自明な結び目の正則表示

例 1.2.3. 任意の  $n$  に対して、 $n$ -ウェーブが存在しない自明な結び目の正則表示が存在する ([42], [43])。

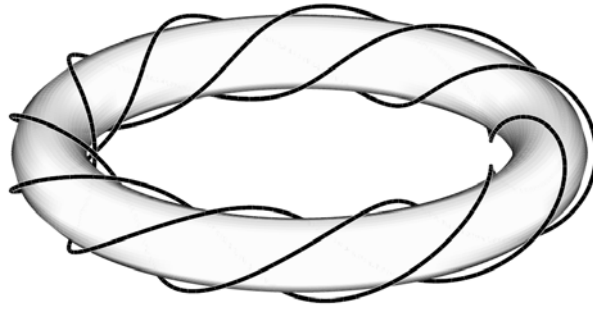


Ochiai の自明な結び目の正則表示

注 1.2.4. 結び目の正則表示が自明な結び目の正則表示である為の十分条件が与えられ、Ochiai の自明な結び目の正則表示を解くアルゴリズムが示されている ([49])。

問題 1.2.5. 自明な結び目の正則表示は、一般化された  $n$ -ウェーブで交点数を単調に下げることが出来るか？

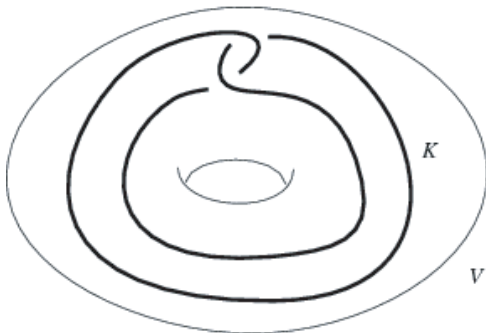
定義 1.2.6.  $K$  がトーラス結び目であるとは、自明なトーラス  $T \subset S^3$  が存在して、 $T \supset K$  を満たすときをいう。



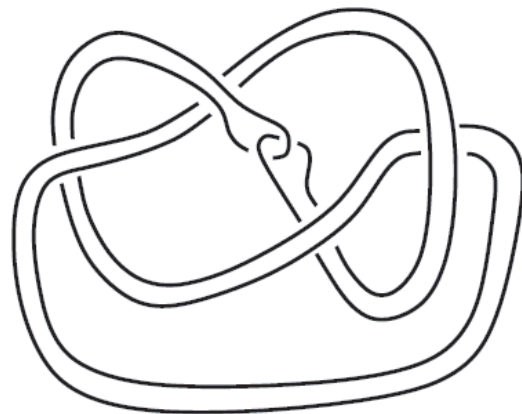
(3, 11) 型トーラス結び目

注 1.2.7. 8 交点までの結び目のうち、トーラス結び目は、 $3_1, 5_1, 7_1 = T(2, 2n + 1)$  ( $n = 1, 2, 3$ ) 及び、 $8_{19} = T(3, 4)$  のみである。

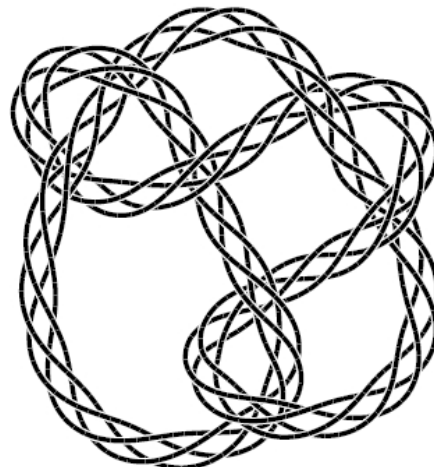
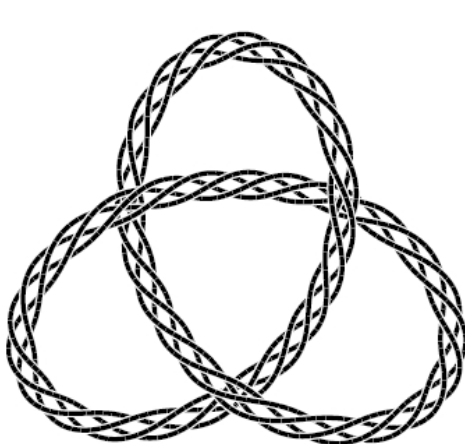
定義 1.2.8.  $K$  がサテライト結び目であるとは、 $E(K) = S^3 - \text{int}N(K)$  内に本質的トーラス  $T$  が存在するときをいう。特に、 $K$  が  $T$  上のループにイソトピックのとき、 $K$  をケーブル結び目という。



トーラス体の中の結び目

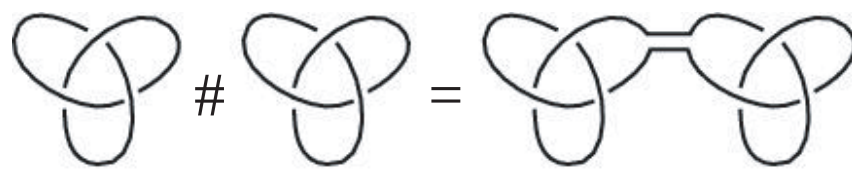


8 の字結び目のホワイトヘッドの 2 重化結び目

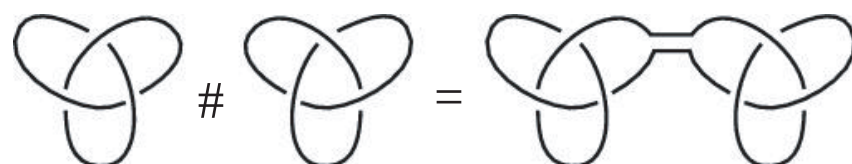


$3_1$  と  $7_6$  に沿った (4, 44) 型ケーブル結び目

定義 1.2.9.  $K$  が合成結び目であるとは、 $K$  と 2 点で交わる 2 次元球面  $S$  が存在して、 $S \cap E(K)$  が  $E(K)$  内で本質的であるときをいう。 $K$  が合成結び目でも自明な結び目でもないとき、 $K$  は素な結び目という。



$3_1 \# 3_1 =$  グラニー結び目



$3_1 \# 3_1^* =$  スクエア結び目

練習問題 1.2.10. 合成結び目はサテライト結び目であることを示せ。

自然数の素因数分解定理に対応して、結び目についても分解定理がある。

定理 1.2.11 ([58]). 任意の非自明な結び目は素な結び目の積に一意的に分解される。

定義 1.2.12 (群の空間への作用).  $X$  を位相空間、 $G$  を群とする。写像  $G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x$  が次を満たすとき、 $G$  は  $X$  に作用するといひ、 $X$  を  $G$ -空間という。

1. 単位元  $e \in G$  と任意の点  $x \in X$  に対し、 $e \cdot x = x$
2.  $g, h \in G$  及び  $x \in X$  に対し、 $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$
3. 任意の  $g \in G$  に対し、写像  $X \rightarrow X, x \mapsto g \cdot x$  が連続

定義 1.2.13 (商空間). 群  $G$  が位相空間  $X$  に作用するとき、 $X$  に同値関係  $\sim$  を次のように定義できる。

- $x \sim y \iff g \in G$  が存在して  $g \cdot x = y$

同値類全体から成る集合を  $X/G$  と表す。標準的全射  $X \rightarrow X/G$  による商位相を持つ位相空間  $X/G$  を  $X$  の  $G$  による商空間という。

練習問題 1.2.14.  $X$  を  $G$ -空間とする。このとき、任意の  $g \in G$  に対し、写像  $X \rightarrow X, x \mapsto g \cdot x$  は同相写像であることを示せ。

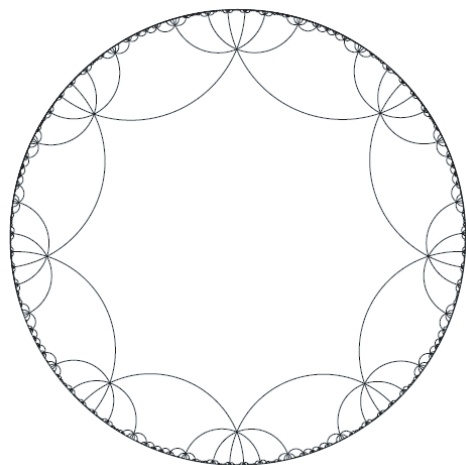
定義 1.2.15 (基本領域).  $X$  を  $G$ -空間とする。 $X$  の閉集合  $V$  が次を満たすとき、 $G$  の  $X$  への作用の基本領域という。

1.  $X = \bigcup_{g \in G} g \cdot V$
2.  $g \neq e \in G$  ならば  $g \cdot \text{int}(V) \cap \text{int}(V) = \emptyset$

例 1.2.16 (トーラス).  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  の  $\mathbb{R}^2$  への作用を  $(m, l) \cdot (x, y) = (m + x, l + y)$  で定める。これは、平面の平行移動である。商空間  $\mathbb{R}^2 / (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$  をトーラスといひ、 $T^2$  で表す。例えば、 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x, y \leq 1\}$  が基本領域である。従って、この基本領域の境界を貼り合わせるとトーラスが得られる。特に、 $\mathbb{R}^2$  は  $T^2$  の普遍被覆空間であり、被覆変換群  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  は  $T^2$  の基本群  $\pi_1(T^2)$  と同型である。 $\pi_1(T^2)$  の生成元は  $m, l$  で与えられ、 $\pi_1(T^2) \cong \langle m, l | [m, l] = e \rangle$  という表示を持つ。ここで、 $[m, l] = m^{-1}l^{-1}ml$  は  $m$  と  $l$  の交換子とする。被覆変換群が等長的なので、トーラスにユークリッド構造 (すなわち、局所的にはユークリッド空間と等長的であるような計量) を与えることができる。

例 1.2.17 (射影平面).  $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$  の  $S^2$  への作用を  $\pm 1 \cdot \vec{x} = \pm \vec{x}$  で定める。これは、球面の各点を対心点に移す写像である。商空間  $S^2/\mathbb{Z}_2$  を射影平面といい、 $P^2$  で表す。 $P^2$  は閉 2 次元多様体である。例えば、 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$  が基本領域である。従って、この基本領域の境界を貼り合わせると射影平面が得られる。特に、 $S^2$  は  $P^2$  の普遍被覆空間であり、被覆変換群  $\mathbb{Z}_2$  は  $P^2$  の基本群  $\pi_1(P^2)$  と同型である。 $\pi_1(P^2)$  の生成元は  $m$  で与えられ、 $\pi_1(P^2) \cong \langle m | m^2 = e \rangle$  という表示を持つ。被覆変換群が等長的なので、射影平面に球面的構造を与えることができる。

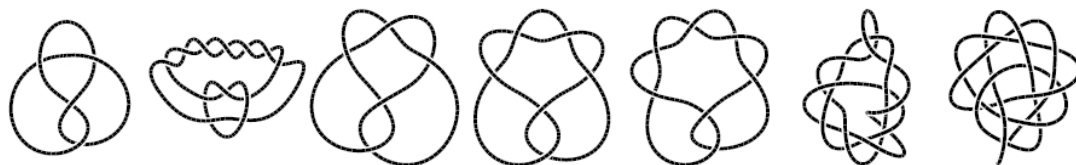
例 1.2.18 (種数 2 の曲面, [63]). 種数 2 の向き付け可能閉曲面  $F$  には、どのような構造を与えることができるだろうか？ トーラスと同じように、切り開いていくと 8 角形が得られ、基本群は、 $\pi_1(F) \cong \langle a, b, c, d | aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 1 \rangle$  であることが分かる。ユークリッド平面や球面のいずれにおいても正 8 角形のタイル貼りは不可能であるので、 $F$  にユークリッド構造や球面的構造を入れることはできない。そこで、双曲平面  $\mathbb{H}^2$  を用いると、正 8 角形のタイル貼りが可能であることが分かる。しかも、被覆変換群の元  $a, b, c, d$  は、それぞれ二つの鏡映変換の合成によって得られるので、等長的である。よって、 $\mathbb{H}^2/\pi_1(F) \cong F$  となり、 $F$  に双曲的構造を与えることができる。



正 8 角形による双曲平面のタイル貼り

$\mathbb{R}^3$  の上半空間  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0\}$  にリーマン計量  $ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)/z^2$  を入れたリーマン多様体を双曲的 3 次元空間といい  $\mathbb{H}^3$  で表す。 $\mathbb{H}^3$  の向きを保つ等長変換群を  $Isom_+(\mathbb{H}^3)$  とする。3 次元多様体  $M$  に対し、 $Isom_+(\mathbb{H}^3)$  の部分群  $G$  で、 $\mathbb{H}^3$  に固有不連続に作用する（即ち、任意の点  $x \in \mathbb{H}^3$  に対して、近傍  $N(x)$  が存在して、各元  $g \neq 1 \in G$  について、 $N(x) \cap g(N(x)) = \emptyset$  が成り立つ）ものが存在して、 $\text{int}M \cong \mathbb{H}^3/G$  となるとき、 $M$  を双曲的多様体といい、 $M$  は双曲的構造を許容するという。このとき、 $\mathbb{H}^3$  は  $\text{int}M$  の普遍被覆空間となるので、 $\pi_1(M) \cong G$  が成り立つ。モストウの剛体性定理 ([38]) より、有限体積を持つ双曲的多様体の双曲的構造は一意的である。

定義 1.2.19.  $K$  が双曲結び目であるとは、 $E(K)$  が双曲的構造を許容するときをいう。



補空間が単純な始めの 7 つの双曲結び目

サーストンの双曲化定理により、次が成り立つ。

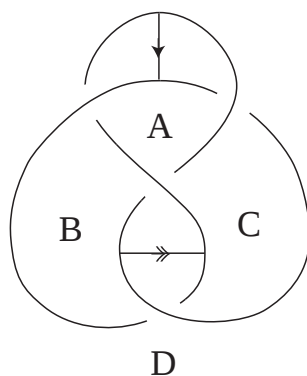
定理 1.2.20 ([62]).  $K$  を  $S^3$  内の結び目とすると、次のいずれかが成り立つ。

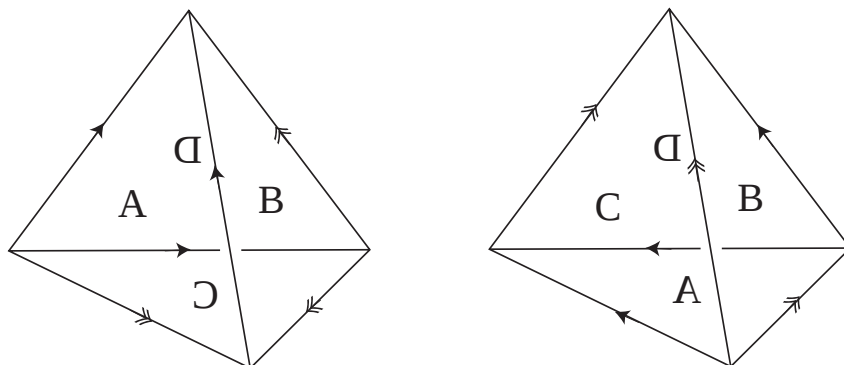
1.  $K$  は自明な結び目である。即ち、 $E(K)$  は本質的ディスクを含む。
2.  $K$  はトーラス結び目である。即ち、 $E(K)$  は本質的アニュラスを含むが、本質的トーラスは含まない。
3.  $K$  はサテライト結び目である。即ち、 $E(K)$  は本質的トーラスを含む。
4.  $K$  は双曲結び目である。即ち、 $E(K)$  は双曲的構造を許容する。

注 1.2.21. 次の表は、16 交点までの素な結び目、トーラス結び目、サテライト結び目、双曲結び目の個数を表す ([21])。

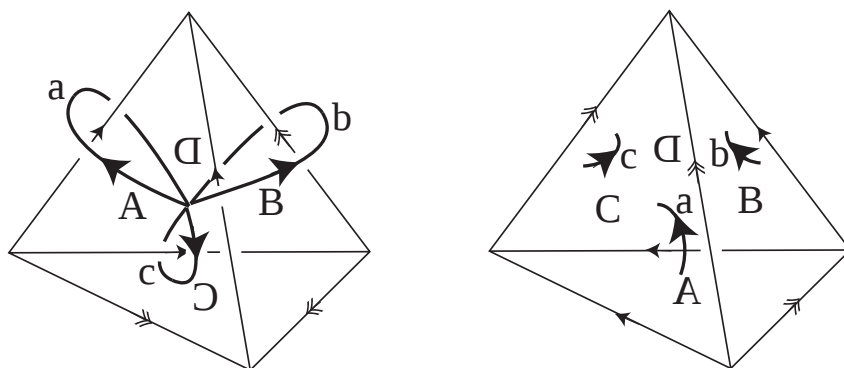
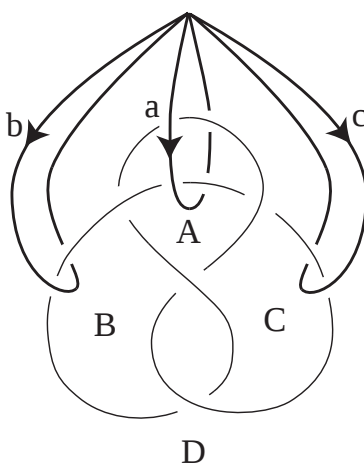
| 交点数 | 素な結び目   | トーラス結び目 | サテライト結び目 | 双曲結び目   |
|-----|---------|---------|----------|---------|
| 3   | 1       | 1       | 0        | 0       |
| 4   | 1       | 0       | 0        | 1       |
| 5   | 2       | 1       | 0        | 1       |
| 6   | 3       | 0       | 0        | 3       |
| 7   | 7       | 1       | 0        | 6       |
| 8   | 21      | 1       | 0        | 20      |
| 9   | 49      | 1       | 0        | 48      |
| 10  | 165     | 1       | 0        | 164     |
| 11  | 552     | 1       | 0        | 551     |
| 12  | 2176    | 0       | 0        | 2176    |
| 13  | 9988    | 1       | 2        | 9985    |
| 14  | 46972   | 1       | 2        | 46969   |
| 15  | 253293  | 2       | 6        | 253285  |
| 16  | 1388705 | 1       | 10       | 1388694 |

例 1.2.22.  $4_1$  は双曲結び目である。実際、 $S^3 - 4_1$  は双曲的 3 次元空間  $\mathbb{H}^3$  の理想正 4 面体二つに分解され、双曲的構造を許容することが示されている ([61])。





基本群は、 $\pi_1(S^3 - 4_1) \cong \langle a, b, c | a^{-1}c^{-1}ab = 1, a^{-1}cb^{-1}c^{-1}b = 1 \rangle$  で与えられるので、 $S^3 - 4_1 \cong \mathbb{H}^3 / \pi_1(S^3 - 4_1)$  である。



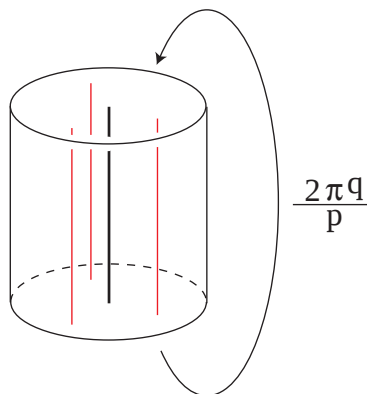
### 1.3 結び目の標準的分解

絡み目  $L$  に対して、次のような標準的分解が存在する。

#### 1.3.1 トーラス分解

まず、 $E(L)$  をトーラス分解する ([24], [25])。  $E(L)$  は単純多様体とザイフェルト多様体に分解される。ここで、3次元多様体  $M$  が単純多様体であるとは本質的トーラスを含まないときをいう。また、 $M$  がザイ

フェルト多様体であるとは、 $M$  がループの和  $\cup l_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) で表されていて、任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対して、 $N(l_\lambda)$  が  $(p, q)$  型ファイバー構造を持ったソリッドトーラスとなっているときをいう。



$(p, q)$  型ファイバー構造を持ったソリッドトーラス

練習問題 1.3.1. トーラス結び目の外部  $E(K)$  はザイフェルト多様体であることを示せ。また、そのファイバー構造は  $S^3$  に拡張できることを示せ。

$S^3$  内の任意のトーラスはソリッドトーラスを囲うことから、各成分は  $S^3$  内のある絡み目の外部に同相である（練習問題 2.2.4 参照）。

外部がザイフェルト多様体である絡み目は分類されている（[7]）ので、以下、外部が単純多様体である絡み目のみを考える。

### 1.3.2 コンウェイ球面分解

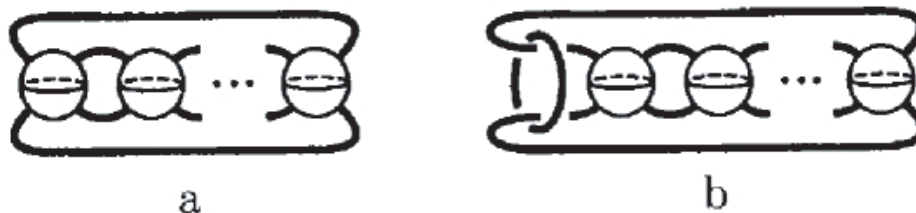
次に、単純絡み目をコンウェイ球面により分解する。

$M$  を 3 次元多様体、 $T$  を  $M$  に適切に埋め込まれた 1 次元多様体とする。 $M$  内に埋め込まれた球面  $S$  で、 $T$  と 4 点で交わるものをコンウェイ球面という。コンウェイ球面  $S$  が本質的であるとは、 $S \cap E(T)$  が圧縮不可能かつ境界平行でないときをいう。 $(M, T)$  がコンウェイ単純であるとは、 $M$  内に本質的コンウェイ球面が存在しないときをいう。

定理 1.3.2 ([6]). 任意の単純な絡み目  $L \subset S^3$  に対して、次の条件を満たす 2 次元多様体  $F \subset S^3$  が一意的に存在する。

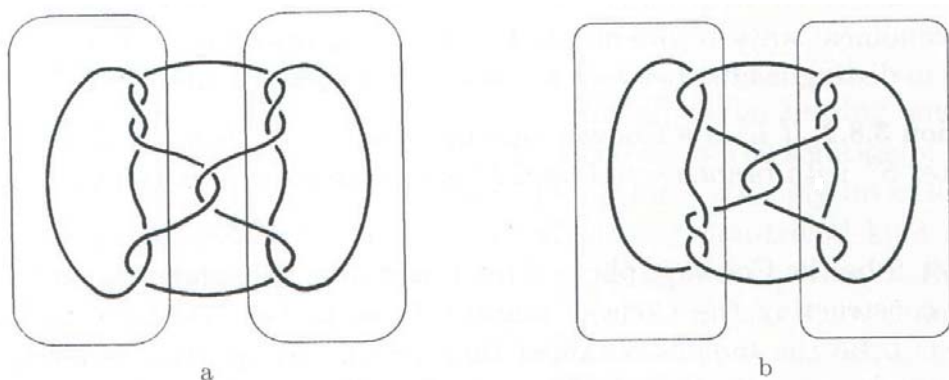
1.  $F$  の成分は圧縮不可能なコンウェイ球面であり、どの 2 つも互いにアンビエントイソトピックでない。
2.  $F$  で  $S^3$  を切り開いて得られる 3 次元多様体の各成分  $N$  はコンウェイ単純であるか、モンテシノス対である。
3.  $F$  からどの成分を取り除いても、性質 2 は満たされない。

ここで、 $(M, T)$  がモンテシノス対であるとは、下図の球面のいくつかを有利タングルで埋めて得られる多様体対である。



モンテシノス対

例 1.3.3. 樹下-寺坂結び目 ([27]) とコンウェイ結び目は下図のような標準的分解を持つ。樹下-寺坂結び目の左側のタングルを水平に  $180^\circ$  回転させるとコンウェイ結び目が得られるので、これら二つの結び目はミュータントである。

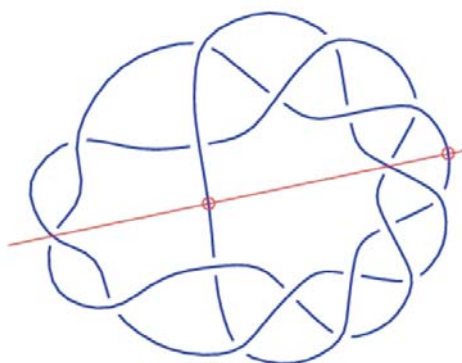


樹下-寺坂結び目とコンウェイ結び目

注 1.3.4. 双曲結び目  $K$  に対し、その補空間の体積を双曲体積といい、 $Vol(S^3 - K)$  で表す。双曲体積は双曲結び目の不変量であり、(6つのトーラス結び目を除く) 10 交点までの素な双曲結び目については完全不変量である。

しかし、ミュータントな二つの双曲結び目は同じ双曲体積を持つ ([52])。例えば、樹下-寺坂結び目  $K_1$  及び、コンウェイ結び目  $K_2$  に対し、 $Vol(S^3 - K_1) = Vol(S^3 - K_2) = 11.219117\dots$  である。

また、同じ双曲体積を持つミュータントでない二つの双曲結び目が存在する。実際、 $Vol(S^3 - 5_2) = Vol(S^3 - 12_{242}) = 2.828120\dots$  である。ここで、 $12_{242}$  は  $(-2, 3, 7)$  型プレッツェル結び目である。 $(-2, 3, 7)$  型プレッツェル結び目は捩れトーラス結び目  $T(3, 5; 2, 1)$  の表示を持つ。



$12_{242} = P(-2, 3, 7) = T(3, 5; 2, 1)$  とその対合軸

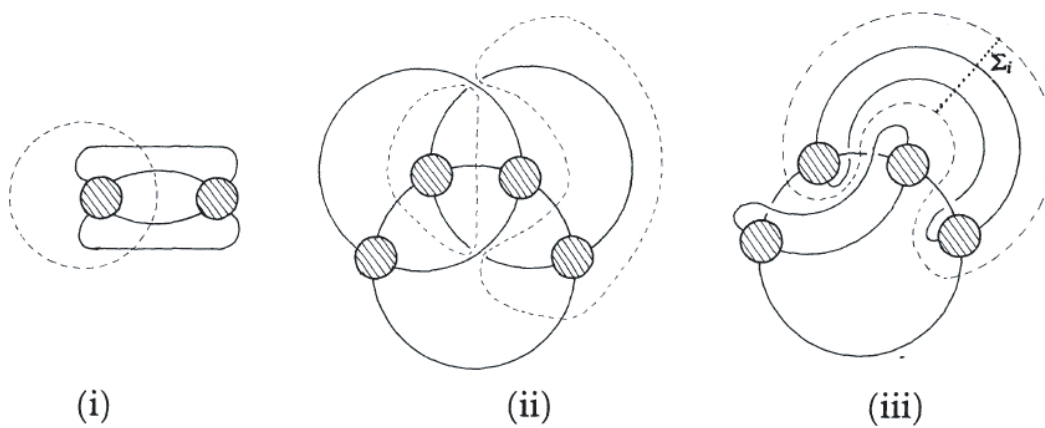
問題 1.3.5. 二つの双曲結び目が同じ双曲体積を持つ為の必要十分条件を求めよ。

注 1.3.6. 8 交点以下の結び目で、本質的コンウェイ球面を持つものは、 $8_{16}$  と  $8_{17}$  のみであることが次の定理より分かる ([33])。

定理 1.3.7 ([33]). 交代絡み目の本質的コンウェイ球面は、

- (i) 見てすぐ分かるか、または
- (ii) 隠れている。

更に、(ii) の場合は、下図の変形で (iii) にできる。



練習問題 1.3.8.  $8_{16}$  と  $8_{17}$  の標準的分解を求めよ。

## 第2章 本質的曲面

### 2.1 基本的定義

定義 2.1.1. ハウスドルフ位相空間  $X$  が次を満たすとき、 $X$  を  $n$  次元多様体という。

- 任意の点  $x \in X$  に対し、 $x$  の開近傍  $U$  で、 $\mathbb{R}^n$  又は  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$  と同相なものが存在する。

$\mathbb{R}_+^n$  に同相な開近傍を持つ点  $x \in X$  からなる集合を  $X$  の境界といい、 $\partial X$  で表す。 $X - \partial X$  を  $X$  の内部といい、 $\text{int}X$  で表す。 $X$  がコンパクトかつ  $\partial X = \emptyset$  を満たすとき、 $X$  を閉  $n$  次元多様体という。 $X$  がコンパクトでなく、かつ  $\partial X = \emptyset$  を満たすとき、 $X$  を開  $n$  次元多様体という。

例 2.1.2. 1.  $S^n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$  を  $n$  次元球面という。各点の開近傍は  $\mathbb{R}^n$  と同相であるから、 $S^n$  は  $n$  次元多様体である。また、 $S^n$  はコンパクトで、 $\partial S^n = \emptyset$  であるから、閉  $n$  次元多様体である。

2.  $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$  を  $n$  次元球体という。各点  $(x_1, \dots, x_n) \in B^n$  の開近傍は、

- $x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1$  のとき、 $\mathbb{R}^n$  と同相で、
- $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$  のとき、 $\mathbb{R}_+^n$  と同相

であるから、 $B^n$  は  $n$  次元多様体である。また、 $\partial B^n = S^{n-1} \neq \emptyset$  であるから、 $B^n$  は閉  $n$  次元多様体でも開  $n$  次元多様体でもない。

練習問題 2.1.3. 任意の  $n$  次元多様体  $X$  に対して、 $\partial X = \emptyset$  か、又は  $\partial X$  は  $(n-1)$  次元多様体であることを示せ。また、 $\partial \partial X = \emptyset$  を示せ。

定義 2.1.4.  $X$  を  $n$  次元多様体とし、 $Y$  を  $m$  ( $\geq n$ ) 次元多様体とする。連続写像  $f: X \rightarrow Y$  が次を満たすとき、埋め込みという。

- $f: X \rightarrow f(X)$  が同相写像

また、埋め込み  $f: X \rightarrow Y$  が次を満たすとき、適切という。

- $f(\partial X) \subset \partial Y$  かつ、 $f(\text{int}X) \subset \text{int}Y$

定義 2.1.5.  $Y$  を  $m$  次元多様体とし、 $X_i$  を  $Y$  内に埋め込まれた  $n_i$  ( $\leq m$ ) 次元多様体とする ( $i = 1, 2$ )。次を満たすとき、 $X_1$  と  $X_2$  は横断的に交わっているという。

- 任意の点  $x \in X_1 \cap X_2$  の  $Y$  内での開近傍  $N_x$  に対して、同相写像  $f: N_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  が存在し、 $f(X_1) = \mathbb{R}^{n_1} \times \{0\}^{m-n_1}$  かつ  $f(X_2) = \{0\}^{m-n_2} \times \mathbb{R}^{n_2}$

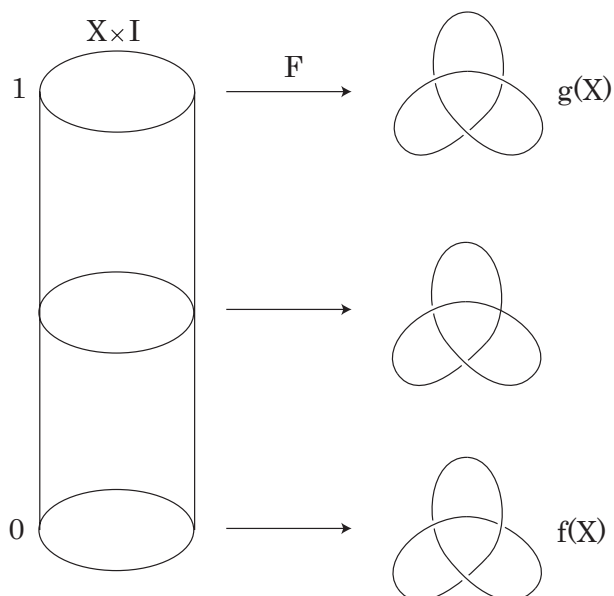
$X_1$  と  $X_2$  が横断的に交わっているとき、 $X_1 \cap X_2$  は  $\emptyset$  か、又は  $Y$  内の  $n_1 + n_2 - m$  次元部分多様体である。このとき、 $X_1$  と  $X_2$  は一般の位置にあるという。

以下、 $X, Y$  を多様体とし、 $f, g : X \rightarrow Y$  を埋め込みとする。 $I = [0, 1]$  は単位区間である。

定義 2.1.6. 次を満たすとき、 $f$  と  $g$  はホモトピックであるという。

- 連続写像  $F : X \times I \rightarrow Y$  が存在し、 $F|_{X \times \{0\}} = f$  かつ  $F|_{X \times \{1\}} = g$

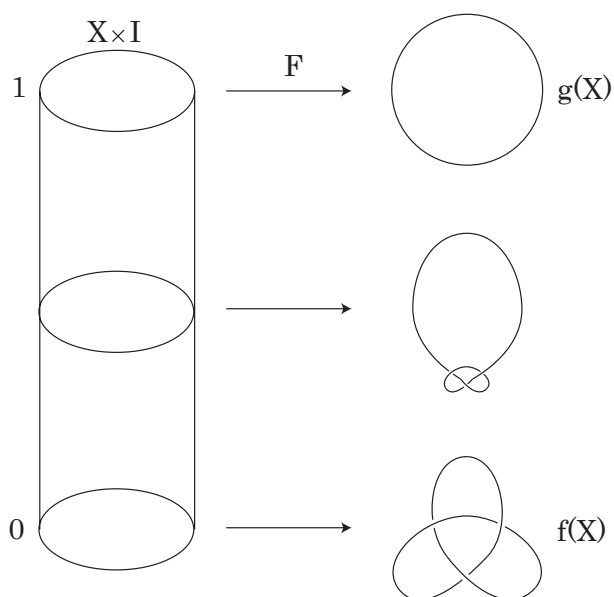
$F$  を  $f$  と  $g$  の間のホモトピーという。各  $t \in I$  に対して、 $F|_{X \times \{t\}} = F_t$  とおく。



定義 2.1.7. 次を満たすとき、 $f$  と  $g$  はイソトピックであるという。

- $f$  と  $g$  の間のホモトピー  $F : X \times I \rightarrow Y$  が存在し、各  $t \in I$  に対して、 $F_t : X \rightarrow Y$  が埋め込み

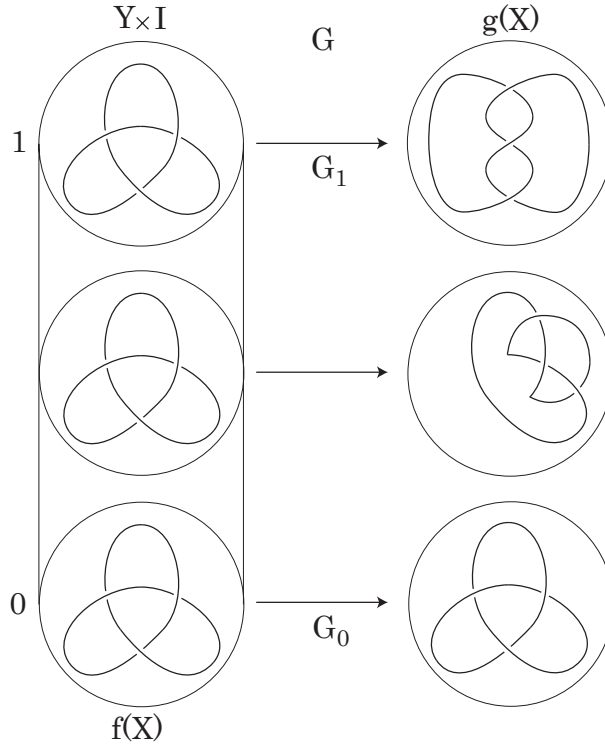
このとき、 $F$  を  $f$  と  $g$  の間のイソトピーという。



定義 2.1.8. 次を満たすとき、 $f$  と  $g$  はアンビエントイソトピックであるという。

- イソトピー  $G : Y \times I \rightarrow Y$  が存在し、 $G_0 = id_Y$  かつ  $G_1 f = g$

このとき、 $G$  を  $f$  と  $g$  の間のアンビエントイソトピーという。



練習問題 2.1.9. 次を示せ。

1.  $f$  と  $g$  がアンビエントイソトピックならば、イソトピックである。また、一般に逆は成り立たない。
2.  $f$  と  $g$  がイソトピックならば、ホモトピックである。また、一般に逆は成り立たない。

定理 2.1.10. 任意の連結な 0 次元多様体は、 $\mathbb{R}^0$  に同相である。

定理 2.1.11. 任意の連結な 1 次元多様体は、 $S^1$ ,  $B^1$ ,  $\mathbb{R}_+^1$ ,  $\mathbb{R}^1$  のいずれかに同相である。

$S^1$  をループ、 $B^1$  をアークという。

定義 2.1.12.  $2$  次元球面  $S^2$  から  $n$  枚のオープンディスク  $\text{int}B_1^2$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を除いて得られる  $2$  次元多様体を平面的曲面という。特に、 $n = 2$  のときアニュラスといい、 $n = 3$  のときパンツという。

定義 2.1.13.  $1$  次元球面の直積で得られる  $2$  次元多様体  $S^1 \times S^1$  をトーラスといい、 $T^2$  で表す。

定義 2.1.14.  $2$  次元球面  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  の対心点  $(x_1, x_2, x_3)$  と  $(-x_1, -x_2, -x_3)$  を貼り合わせて得られる  $2$  次元多様体を射影平面といい、 $\mathbb{R}P^2$  で表す。

定義 2.1.15. 射影平面  $\mathbb{R}P^2$  からオープンディスクを除いて得られる  $2$  次元多様体をメビウスの帯という。

定義 2.1.16.  $X_1, X_2$  を  $2$  次元多様体とし、 $D_i \subset \text{int}X_i$  ( $i = 1, 2$ ) をディスクとする。 $X_1 - \text{int}D_1$  と  $X_2 - \text{int}D_2$  を  $\partial D_1$  と  $\partial D_2$  に沿って貼り合わせて得られる  $2$  次元多様体  $X$  を  $X_1$  と  $X_2$  の連結和といい、 $X = X_1 \# X_2$  と表す。逆に、 $X$  は  $X_1$  と  $X_2$  に分解されるという。

定義 2.1.17.  $2$  次元多様体  $X$  の任意の分解  $X = X_1 \# X_2$  に対して、 $X_1$  と  $X_2$  の少なくとも一方が  $2$  次元球面であるとき、 $X$  は素であるという。但し、 $2$  次元球面は素でないとする。

定義 2.1.18. 2次元多様体  $X$  内の任意のループ  $l$  に対して、 $N(l)$  がアニュラスであるとき、 $X$  を向き付け可能という。 $N(l)$  がメビウスの帯となるようなループ  $l$  が存在するとき、 $X$  を向き付け不可能という。

定義 2.1.19.  $g$  個のトーラス  $T_1^2, \dots, T_g^2$  の連結和で得られる 2次元多様体  $F_g = T_1^2 \# \dots \# T_g^2$  を種数  $g$  の向き付け可能閉曲面という。 $g = 0$  のときは、 $F_0 = S^2$  と定める。 $h$  個の射影平面  $\mathbb{R}P_1^2, \dots, \mathbb{R}P_h^2$  の連結和で得られる 2次元多様体  $N_h = \mathbb{R}P_1^2 \# \dots \# \mathbb{R}P_h^2$  を種数  $h$  の向き付け不可能閉曲面という。

定理 2.1.20. 任意の連結な閉 2次元多様体は、次のいずれかに同相である。

| 種数      | 0     | 1     | 2     | 3     | ... |
|---------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 向き付け可能  | $F_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | ... |
| 向き付け不可能 |       | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ | ... |

練習問題 2.1.21.  $\mathbb{R}P^2 \# T^2 \approx \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$  を示せ。(つまり  $N_1 \# F_1 \approx N_3$  である。)

定義 2.1.22.  $G$  を 2次元多様体  $X$  内に埋め込まれたグラフで、 $X - G$  の各成分がオープンディスクであるとする。 $V$  を  $G$  の頂点数、 $E$  を  $G$  の辺数、 $F$  を  $X - G$  の面数とおくとき、 $\chi(X) = V - E + F$  を  $X$  のオイラー標数という。

練習問題 2.1.23. 次を示せ。

1.  $X = X_1 \# X_2$  のとき、 $\chi(X) = \chi(X_1) + \chi(X_2) - 2$
2.  $\chi(F_g) = 2 - 2g$
3.  $\chi(N_h) = 2 - h$

定義 2.1.24.  $F_g$  から  $b$  枚のオープンディスクを除いて得られる 2次元多様体を  $F_{g,b}$  で表す。 $N_h$  から  $b$  枚のオープンディスクを除いて得られる 2次元多様体を  $N_{h,b}$  で表す。

定理 2.1.25. 任意の連結なコンパクト 2次元多様体は、境界成分が  $b$  とすると、次のいずれかに同相である。

| 種数      | 0         | 1         | 2         | 3         | ... |
|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|
| 向き付け可能  | $F_{0,b}$ | $F_{1,b}$ | $F_{2,b}$ | $F_{3,b}$ | ... |
| 向き付け不可能 |           | $N_{1,b}$ | $N_{2,b}$ | $N_{3,b}$ | ... |

定義 2.1.26. 3次元球体  $B^3$  の境界  $\partial B^3$  内の  $2g$  枚のディスク  $D_1^\pm, \dots, D_g^\pm$  を交わらないようにとり、 $D_i^+$  と  $D_i^-$  を貼り合わせて得られる 3次元多様体を種数  $g$  のハンドル体といい、 $H_g$  で表す。

定義 2.1.27.  $M$  を閉 3次元多様体とし、 $H_g^+$  と  $H_g^-$  を二つの種数  $g$  のハンドル体とする。 $M = H_g^+ \cup H_g^-$  かつ  $H_g^+ \cap H_g^- = \partial H_g^+ = \partial H_g^- = F$  を満たすとき、組  $(H_g^+, H_g^-)$  を  $M$  の種数  $g$  のヒーガード分解という。ここで、 $F$  をヒーガード曲面という。

練習問題 2.1.28. 任意の  $g$  に対して、3次元球面  $S^3$  は種数  $g$  のヒーガード分解を持つことを示せ。

問題 2.1.29. 任意の閉 3次元多様体は、ある種数  $g$  のヒーガード分解を持つことを示せ。(ヒント：任意の 3次元多様体が三角形分割を持つことを使え。)

定義 2.1.30.  $X_1, X_2$  を 3次元多様体とし、 $B_i \subset \text{int} X_i$  ( $i = 1, 2$ ) を 3次元球体とする。 $X_1 - \text{int} B_1$  と  $X_2 - \text{int} B_2$  を  $\partial B_1$  と  $\partial B_2$  に沿って貼り合わせて得られる 3次元多様体  $X$  を  $X_1$  と  $X_2$  の連結和といい、 $X = X_1 \# X_2$  と表す。逆に、 $X$  は  $X_1$  と  $X_2$  に分解されるという。

定義 2.1.31.  $3$ 次元多様体  $X$  の任意の分解  $X = X_1 \# X_2$  に対して、 $X_1$  と  $X_2$  の少なくとも一方が  $3$ 次元球面であるとき、 $X$  は素であるという。但し、 $3$ 次元球面は素でないとする。

定義 2.1.32.  $3$ 次元多様体  $M$  内の任意のループ  $l$  に対して、 $N(l)$  がトーラス体であるとき、 $M$  を向き付け可能という。 $N(l)$  がクライン体となるようなループ  $l$  が存在するとき、 $M$  を向き付け不可能という。

定理 2.1.33 ([28], [36]). 任意のコンパクト  $3$ 次元多様体  $M$  は、素な多様体に連結和分解される。また、 $M$  が向き付け可能のときは、この分解は一意的である。

定義 2.1.34.  $F$  を  $2$ 次元多様体とし、 $\alpha$  を  $F$  に適切に埋め込まれたループとする。次を満たすとき、 $\alpha$  は非本質的であるという。

- $F$  内のディスク  $D$  で、 $\partial D = \alpha$  となるものが存在する。

$\alpha$  が非本質的でないとき、本質的であるという。

次に、 $\alpha$  を  $F$  に適切に埋め込まれたアークとする。次を満たすとき、 $\alpha$  は非本質的であるという。

- $F$  内のディスク  $D$  で、 $\partial D = \alpha \cup \beta$ ,  $\alpha \cap \beta = \partial \alpha = \partial \beta$  ( $\beta$  は  $\partial F$  内のアーク) となるものが存在する。

$\alpha$  が非本質的でないとき、本質的であるという。

練習問題 2.1.35. 次を示せ。

1.  $S^2$  内に適切に埋め込まれた任意のループは非本質的である。
2. ディスク内に適切に埋め込まれた任意のアークは非本質的である。
3.  $S^2$  でも  $B^2$  でもない曲面は、本質的なループを含む。更に、境界を持つならば、本質的なアークを含む。

定義 2.1.36.  $M$  を  $3$ 次元多様体とし、 $F$  を  $M$  内に適切に埋め込まれた曲面とする。次を満たすとき、 $F$  は圧縮可能であるという。

$F$  がディスクのとき：  $\partial M$  内のディスク  $D$  と  $M$  内の  $3$ 次元球体  $B$  で、 $\partial F = \partial D$  かつ  $\partial B = F \cup D$  となるものが存在する。

$F$  が球面のとき：  $M$  内の  $3$ 次元球体  $B$  で、 $\partial B = F$  となるものが存在する。

その他の場合：  $M$  内のディスク  $D$  で、 $D \cap F = \partial D$  かつ  $\partial D$  は  $F$  内で本質的なループとなるものが存在する。

$F$  が圧縮可能でないとき、圧縮不可能であるという。

定義 2.1.37.  $M$  を  $3$ 次元多様体とし、 $F$  を  $M$  内に適切に埋め込まれた曲面とする。次を満たすとき、 $F$  は境界圧縮可能であるという。

- $M$  内のディスク  $D$  で、 $D \cap F = \partial D \cap F = \alpha$  が  $F$  内に適切に埋め込まれた本質的なアークであり、かつ  $D \cap \partial M = \partial D - \text{int } \alpha$  が  $\partial M$  内のアークとなるものが存在する。

$F$  が境界圧縮可能でないとき、境界圧縮不可能であるという。

定義 2.1.38.  $M$  を  $3$ 次元多様体とし、 $F$  を  $M$  内に適切に埋め込まれた曲面とする。次を満たすとき、 $F$  は境界平行であるという。

- 埋め込み  $h : F \times [0, 1] \rightarrow M$  で、 $h(F \times \{0\}) = F$  かつ  $h(F \times [0, 1]) \cap \partial M = h(\partial F \times [0, 1] \cup F \times \{1\})$  となるものが存在する。

即ち、 $F$  は  $\partial M$  内の部分曲面にイソトピックである。

定義 2.1.39.  $M$  を 3次元多様体とし、 $F$  を  $M$  内に適切に埋め込まれた曲面とする。次を満たすとき、 $F$  は本質的であるという。

1.  $F$  は圧縮不可能である。
2.  $F$  は境界圧縮不可能である。
3.  $F$  は境界平行でない。

定義 2.1.40.  $M$  を 3次元多様体とする。 $M$  内に圧縮不可能な球面が存在しないとき、 $M$  は既約であるという。また、 $M$  内に圧縮不可能なディスクが存在しないとき、 $M$  は境界既約であるという。

## 2.2 基本的定理

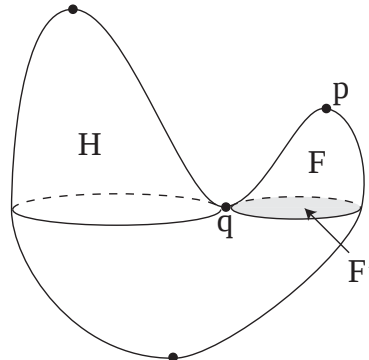
この節で述べる定理は全て基本的なものであり、切り貼り論法の基礎となっている。自由自在に使えるだけでなく、証明を自力でできるようになることが望ましい。

定理 2.2.1 ([2], [30]). 3次元球面  $S^3$  に埋め込まれた 2次元球面  $S^2$  は、 $S^3$  を二つの 3次元球体  $B_+^3$  と  $B_-^3$  に分ける。即ち、 $S^3 = B_+^3 \cup_{S^2} B_-^3$  である。

*Proof.*  $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$  を標準的なモース関数とし、 $S^2$  のイソトピーで  $f|_{S^2}$  がモース関数となるようにする。即ち、 $S^2$  の臨界点は極小点・極大点か又はサドルのみである。 $S^2$  のイソトピーで、 $S^2$  の臨界点の個数を最小にしておく。

もし、 $S^2$  の臨界点が二つのみ、即ち、ただ一つの極小点  $a \in \mathbb{R}$  とただ一つの極大点  $b \in \mathbb{R}$  のみならば、任意の  $t \in (a, b)$  について、 $f^{-1}(t) \cap S^2$  は 2次元球面  $f^{-1}(t)$  を二つのディスクに分けるループである。ある  $t_0 \in (a, b)$  に対して、 $l = f^{-1}(t_0) \cap S^2$ 、 $D_1 = f^{-1}([a, t_0]) \cap S^2$ 、 $D_2 = f^{-1}([t_0, b]) \cap S^2$  とおく。 $f^{-1}([a, t_0])$  内で  $D_1$  が境界平行なディスクを  $D'_1$ 、 $f^{-1}([t_0, b])$  内で  $D_2$  が境界平行なディスクを  $D'_2$  とする。もし、 $D'_1 = D'_2$  ならば、 $S^2$  は  $f^{-1}([a, b])$  内で 3次元球体を張る。従って、 $S^2$  は  $S^3$  を二つの 3次元球体に分ける。もし、 $D'_1 \neq D'_2$  ならば、 $D_1$  から  $D'_1$  へのイソトピーと  $D_2$  から  $D'_2$  へのイソトピーにより、 $S^2$  はレベル球面  $f^{-1}(t_0)$  にイソトピックである。従って、 $S^2$  は  $S^3$  を二つの 3次元球体  $f^{-1}((-\infty, t_0])$  と  $f^{-1}([t_0, \infty))$  に分ける。

次に、 $f|_{S^2}$  の臨界点が二つより大きい場合を考える。 $p$  を  $S^2$  の極大点のうちで最も低い極大点とし、 $p$  を含む  $S^2$  の部分曲面でレベル球面に平行なものの中で最大のものを  $F$  とする。



$\partial F$  で起こる臨界点  $q$  に着目する。 $q$  がサドルの場合、 $\partial F$  付近での変化は、バンド  $B$  を  $F$  及び  $q$  より上にある  $S^2$  の部分曲面  $H$  に付着したとみなすことができる。また、 $q$  が極小点の場合は、ディスク  $E$  を  $\partial F$  に付着したとみなすことができる。臨界点  $q$  について、以下の場合が考えられる。

1. バンド  $B$  は、 $F'$  の外側にあり、 $F$  の同じ境界成分を繋ぐ
2. バンド  $B$  は、 $F'$  の外側にあり、 $F$  の境界成分と  $H$  の境界成分を繋ぐ
3. バンド  $B$  は、 $F'$  の内側にあり、 $F$  の同じ境界成分を繋ぐ
4. バンド  $B$  は、 $F'$  の内側にあり、 $F$  の異なる境界成分を繋ぐ
5. ディスク  $E$  は、 $F$  の境界成分に蓋をする

1 の場合、 $F \cup B$  はレベル球面に平行であるので、 $F$  の最大性に反する。

2 の場合、 $F$  の極大点  $p$  とサドル  $q$  がキャンセルするので、 $S^2$  の臨界点の個数の最小性に矛盾する。

3 の場合、 $F \cup B$  の圧縮ディスク  $D$  で、 $B$  を一度だけ通り  $f$  に関して垂直なものが存在する。 $\partial D$  は  $S^2$  を二つのディスクに分けるので、 $D$  で  $S^2$  を圧縮すると、二つの球面  $S^{2'}$ ,  $S^{2''}$  を得られる。 $S^{2'}$ ,  $S^{2''}$  は、 $S^2$  より臨界点の個数が少なくなっているので、帰納法により、 $S^3$  を二つの 3 次元球体に分ける。従って、 $S^2$  も  $S^3$  を二つの 3 次元球体に分けることが分かる。

4 の場合も 3 の場合と同様である。

5 の場合、 $F$  のサドルと極小点  $q$  がキャンセルするので、 $S^2$  の臨界点の個数の最小性に矛盾する。 □

Alexandar の定理は、一般種数の曲面に拡張される。

定理 2.2.2.  $S^3$  に埋め込まれた閉曲面  $F$  は圧縮可能である。

練習問題 2.2.3. 定理 2.2.1 の証明と同様に、定理 2.2.2 を証明せよ。

練習問題 2.2.4. 定理 2.2.2 を用いて、次を証明せよ。

- $S^3$  に埋め込まれたトーラス  $T$  はソリッドトーラス  $V$  を張る。即ち、 $\partial V = T$  を満たすソリッドトーラス  $V$  が  $S^3$  内に存在する。

更に、 $S^3$  をハンドル体に拡張しても成り立つ。(ハンドル体は  $S^3$  の部分多様体とみなせるので、これは拡張である。)

定理 2.2.5. ハンドル体に埋め込まれた閉曲面は圧縮可能である。

*Proof.*  $D = D_1 \cup \cdots \cup D_g$  をハンドル体  $V$  内に適切に埋め込まれたディスクの和で、 $V - \text{int}N(D)$  が 3 次元球体となるものとする。 $F$  を  $V$  に埋め込まれた閉曲面とし、 $F$  と  $D$  との交わりを最小にしておく。

もし、 $F \cap D = \emptyset$  ならば、 $F$  は 3 次元球体  $V - \text{int}N(D)$  に含まれるので、定理 2.2.2 より、圧縮可能である。

次に、 $F \cap D \neq \emptyset$  の場合を考える。 $F$  は閉であるので、 $F \cap D$  はループからなる。 $F \cap D$  のループのうちで、 $D$  上最も内側のループを  $l$  とし、 $l$  が  $D$  上張るディスクを  $\delta$  とする。このとき、 $\delta \cap F = \partial\delta$  であるので、もし  $\partial\delta$  が  $F$  上本質的ならば、 $\delta$  は  $F$  の圧縮ディスクであり、 $F$  は圧縮可能である。もし、 $\partial\delta$  が  $F$  上本質的でないならば、 $\partial\delta$  が  $F$  上張るディスクを  $\delta'$  とする。定理 2.2.1 より、2 次元球面  $\delta \cup \delta'$  はハンドル体  $V$  内で 3 次元球体  $B$  を張る。 $B$  に沿って  $\delta'$  を  $\delta$  ヘイソトープすることで、 $F$  と  $D$  との交わりを減らすことができる。 $F \cap D$  の交わりの数についての帰納法により、 $F$  は圧縮可能である。 □

ハンドル体に埋め込まれた本質的曲面は、以下のように分類される。

定理 2.2.6.  $F$  をハンドル体  $V$  に埋め込まれた向き付け可能な曲面とする。 $F$  が本質的、即ち圧縮不可能かつ境界圧縮不可能であり、境界平行でなければ、 $F$  はディスクである。

*Proof.* 先ず、 $F$  が圧縮不可能であることから、定理 2.2.5 より  $\partial F \neq \emptyset$  であることに注意する。

$D = D_1 \cup \cdots \cup D_g$  をハンドル体  $V$  内に適切に埋め込まれたディスクの和で、 $V' = V - \text{int}N(D)$  が 3 次元球体となるものとする。 $F$  と  $D$  との交わりを最小にしておく。

もし、 $F \cap D = \emptyset$  ならば、 $F$  は 3 次元球体  $V'$  に含まれる。 $\partial F$  の成分のうちで  $\partial V'$  上最も内側のループを  $l$  とし、 $l$  が  $\partial V'$  上張るディスクを  $\delta$  とする。 $\delta \cap F = \partial \delta$  であるので、 $F$  が圧縮不可能であることから、 $\partial \delta = l$  は  $F$  内でディスクを張る。即ち、 $F$  はディスクである。また、 $F$  は  $V$  内で境界平行でないので、 $V$  内の本質的なディスクである。

次に、 $F \cap D \neq \emptyset$  と仮定する。定理 2.2.5 の証明と同様の議論により、 $F \cap D$  はループを含まないことが分かる。 $\alpha$  を  $F \cap D$  のアークで  $D$  上最も外側のアークとし、 $\alpha$  が  $D$  上張るディスクを  $\delta$  とする。 $|F \cap D|$  の最小性より、 $\delta \cap F = \partial \delta \cap F = \alpha$  は  $F$  内に適切に埋め込まれた本質的なアークであり、かつ  $\delta \cap \partial V = \partial \delta - \text{int} \alpha$  が  $\partial V$  内のアークである。従って、 $F$  は境界圧縮可能となり、仮定に矛盾する。  $\square$

定理 2.2.5 は、ハンドル体の特徴付けにもなっている。

定理 2.2.7.  $M$  を向き付け可能な 3 次元多様体で、 $\partial M \neq \emptyset$  とする。このとき、次は同値である。

1.  $M$  はハンドル体である。
2.  $M$  は圧縮不可能閉曲面を含まない。

*Proof.* (1  $\Rightarrow$  2) 定理 2.2.5 そのものである。

(2  $\Rightarrow$  1) 先ず、 $\partial M$  が球面の場合、 $\partial M$  は圧縮可能であるので、3 次元球体を張る。従って、 $M$  は 3 次元球体であり、ハンドル体である。

次に、 $\partial M$  の種数が 1 以上の場合を考える。 $\partial M$  は圧縮可能であるので、圧縮ディスク  $D$  が存在する。 $\partial M = S_1 \cup \cdots \cup S_n$  とおき、 $\partial M$  の複雑度  $c(\partial M)$  を  $g(S_1), \dots, g(S_n)$  を大きい順に並べた組  $(g_1, \dots, g_n)$  と定義し、辞書式順序で複雑度に順序を付ける。 $M' = M - \text{int}N(D)$  に  $c(\partial M)$  に関する帰納法を適用することにより、 $M'$  はハンドル体である。従って、 $M$  もハンドル体である。  $\square$

次の定理は、本質的曲面同士の交わりを扱うときに必ず用いる重要な定理である。

定理 2.2.8.  $M$  を既約かつ境界既約な 3 次元多様体とし、 $F_1$  と  $F_2$  を  $M$  内に適切に埋め込まれた圧縮不可能かつ境界圧縮不可能な曲面とする。このとき、 $F_1$  と  $F_2$  のイソトピーで、 $F_1 \cap F_2$  の各成分が  $F_1$  内でも  $F_2$  内でも本質的であるようにできる。

*Proof.* 先ず、 $F_1$  と  $F_2$  を一般の位置にイソトープし、 $|F_1 \cap F_2|$  を最小にしておく。

もし、 $F_1 \cap F_2$  のループで  $F_1$  上本質的でないものが存在したならば、 $F_1$  上最も内側のループを  $\alpha$  とし、 $\alpha$  が  $F_1$  上張るディスクを  $\delta$  とする。 $\delta \cap F_2 = \partial \delta$  であるから、 $F_2$  の圧縮不可能性より、 $\partial \delta$  は  $F_2$  内でディスク  $\delta'$  を張る。 $M$  は既約なので、2 次元球面  $\delta \cup \delta'$  は 3 次元球体  $B$  を張る。 $B$  に沿って、 $\delta'$  を  $\delta$  にイソトープすることにより、 $|F_1 \cap F_2|$  を減らすことができる。これは、 $|F_1 \cap F_2|$  の最小性に矛盾する。よって、 $F_1 \cap F_2$  のループは全て  $F_1$  上で本質的である。同様に、 $F_1 \cap F_2$  のループも全て  $F_2$  上で本質的であることが分かる。

次に、 $F_1 \cap F_2$  のアークで  $F_1$  上本質的でないものが存在したと仮定する。 $F_1$  上最も外側のアークを  $\alpha$  として、 $\alpha$  が  $F_1$  上張るディスクを  $\delta$  とする。 $\delta \cap F_2 = \partial \delta \cap F_2 = \alpha$  は  $F_2$  内に適切に埋め込まれたアークであり、かつ  $\delta \cap \partial M = \partial \delta - \text{int} \alpha$  は  $\partial M$  内のアークであるので、 $F_2$  の境界圧縮不可能性より、 $\alpha$  は  $F_2$  上ディスク  $\delta'$  を張る。 $M$  は境界既約なので、ディスク  $\delta \cup \delta'$  は  $\partial M$  のディスクと合わせ 3 次元球体  $B$  を張

る。  $B$  に沿って  $\delta'$  を  $\delta$  にイソトープすることにより、  $|F_1 \cap F_2|$  を減らすことができる。これは、  $|F_1 \cap F_2|$  の最小性に矛盾する。よって、  $F_1 \cap F_2$  のアークは全て  $F_1$  上で本質的である。同様に、  $F_1 \cap F_2$  のアークも全て  $F_2$  上で本質的であることが分かる。  $\square$

次の定理も、結び目外部内に埋め込まれた曲面を扱うときにしばしば用いる。

**定理 2.2.9.**  $K$  を  $S^3$  内の結び目とし、  $F$  を  $E(K)$  内に適切に埋め込まれた圧縮不可能な曲面とする。  $F$  が境界圧縮可能ならば、  $F$  は境界平行なアニュラスである。

*Proof.* 先ず、  $F$  が圧縮不可能であることより、  $\partial F$  はトーラス  $\partial E(K)$  上互いに平行な本質的ループからなることに注意する。  $\delta$  を  $F$  の境界圧縮ディスクとし、  $\delta \cap F = \alpha$ 、  $\partial\delta - \text{int}\alpha = \beta$  とおく。  $\beta$  を含む  $\partial E(K) - \partial F$  のアニュラス成分を  $A$  とする。

もし、  $\beta$  が  $A$  内で非本質的ならば、  $\delta$  のイソトピーで  $\partial\delta \subset F$  とできる。このとき、  $\delta \cap F = \partial\delta$  であるので、  $F$  の圧縮不可能性より、  $\partial\delta$  は  $F$  内でディスクを張る。これは、  $\alpha$  が  $F$  内で非本質的であることを意味するので、  $\delta$  が境界圧縮ディスクであることに矛盾する。

次に、  $\beta$  が  $A$  内で本質的な場合を考える。  $A$  を  $\beta$  で切り開いて得られるディスクを  $E$  とする。  $E$  に、  $\delta$  のコピーを二枚貼り合わせて得られるディスクを  $\delta'$  とする。  $\delta' \cap F = \partial\delta'$  であるので、  $F$  の圧縮不可能性より、  $\partial\delta'$  は  $F$  上ディスク  $\delta''$  を張る。従って、  $F$  はアニュラスであり、  $E(K)$  が既約より、 2次元球面  $\delta' \cup \delta''$  は 3次元球体を張る。よって、  $F$  は境界平行である。  $\square$

**定理 2.2.10.**  $S$  を曲面とし、  $F$  を  $S \times I$  内に埋め込まれた圧縮不可能な曲面で、  $\partial F \subset S \times \{0\}$  を満たすものとする。このとき、  $F$  は境界平行である。

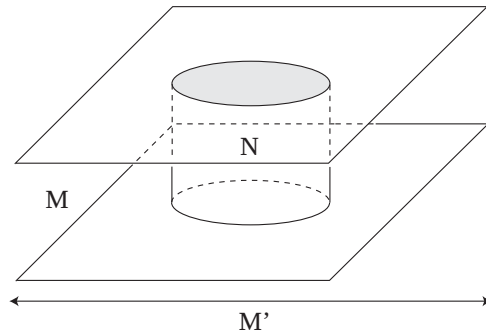
**練習問題 2.2.11.** 定理 2.2.10 を証明せよ。

$F$  を曲面とし、  $C$  を  $F$  内のループとする。このとき、  $F$  を  $C$  に沿って切り開き、二枚のディスクで蓋をして得られる曲面を  $\sigma(F; C)$  で表す。  $M$  を 3次元多様体とし、  $C$  を  $\partial M$  内のループとする。このとき、  $M$  から  $C$  に沿って 2-ハンドルを加えて得られる 3次元多様体を  $\tau(M; C)$  で表す。

次の定理は、ジェイコのハンドル付加補題として知られている。

**定理 2.2.12** ([23]).  $M$  を既約な 3次元多様体とし、  $F$  を  $\partial M$  内の曲面で、  $M$  内で圧縮可能なものとする。また、  $C$  を  $F$  上のループで、  $F - C$  が  $M$  内で圧縮不可能であるとする。  $\sigma(F; C)$  が 2次元球面でないと仮定する。このとき、  $\tau(M; C)$  は既約であり、かつ  $\sigma(F; C)$  は  $\tau(M; C)$  で圧縮不可能である。

*Proof.*  $\sigma(F; C) = F'$ 、  $\tau(M; C) = M'$ 、  $M' - M = N$  とおく。



$M'$  が可約、または  $F'$  が  $M'$  で圧縮可能と仮定し、  $S$  を  $M'$  内の本質的球面、または  $F'$  の  $M'$  内での圧縮ディスクとする。以下で、  $S \cap N = \emptyset$  を示し、  $M$  の既約性、または  $F - C$  の  $M$  内での圧縮不可能性に矛盾させる。

先ず、 $S$  のイソトピーで、 $S \cap N$  の各成分が  $C$  に平行な境界を持つディスクであるようにできる。この条件の下で、 $|S \cap N|$  が最小となるような  $M'$  内の本質的球面、または  $F'$  の  $M'$  内での圧縮ディスクを改めて  $S$  とおく。 $S' = S \cap M$  とおくと、 $S'$  は  $M$  内に適切に埋め込まれた平面的曲面である。 $F - C$  の  $M$  内での圧縮ディスクを  $D$  とし、 $S'$  との交わりを最小にしておく。

$S' \cap D$  の成分でループが存在したと仮定し、 $\alpha$  を  $D$  内で最も内側のループ、 $\delta$  を  $\alpha$  が  $D$  内で張るディスクとする。 $|S' \cap D|$  の最小性より、 $\delta$  は  $S'$  の圧縮ディスクである。 $\delta$  に沿って  $S'$  を圧縮して得られる曲面のうち、再び  $M'$  内の本質的球面であるか、または  $F'$  の  $M'$  内での圧縮ディスクである成分が存在する。これは、 $|S \cap N|$  の最小性に矛盾する。次に、 $S' \cap D$  の成分でアークが存在したと仮定し、 $\alpha$  を  $D$  内で最も外側のアーク、 $\delta$  を  $\alpha$  が  $D$  内で張るディスクとする。 $\alpha$  の  $S'$  上の場合分けとして、次が考えられる。

1.  $\alpha$  は  $\partial S$  を繋ぐ。
2.  $\alpha$  は  $\partial S' - \partial S$  のある一つの成分を繋ぐ。
3.  $\alpha$  は  $\partial S' - \partial S$  の異なる成分を繋ぐ。
4.  $\alpha$  は  $\partial S$  と  $\partial S' - \partial S$  を繋ぐ。

1 の場合、 $\delta$  に沿って  $S'$  を境界圧縮することにより、 $S$  から二つのディスクが得られる。これら二つのディスクのうち、少なくとも一つの境界は  $F'$  内で本質的であるので、 $F'$  の圧縮ディスクである。これは、 $|S \cap N|$  の最小性に矛盾する。

2 の場合、もし、 $\beta = \partial\delta - \text{int}\alpha$  が  $F - \partial S'$  内で非本質的ならば、 $\beta$  を滑らせることで  $\delta$  は  $S'$  の圧縮ディスクとなる。 $\delta$  に沿って  $S'$  を圧縮して得られる曲面のうち、再び  $M'$  内の本質的球面であるか、または  $F'$  の  $M'$  内での圧縮ディスクである成分が存在する。これは、 $|S \cap N|$  の最小性に矛盾する。もし、 $\beta$  が  $F - \partial S'$  内で本質的ならば、 $S'$  を  $\alpha$  で切り開き、 $\delta$  を貼り合わせて得られるディスクをイソトープすることで、 $|S \cap N|$  がより少ない圧縮ディスクが得られる。これは、 $|S \cap N|$  の最小性に矛盾する。

3 の場合、 $\delta$  に沿って  $S'$  を境界圧縮し、更に  $S$  のイソトピーで  $N$  を通過させることにより、 $S \cap N$  のディスクを二枚減らせる。これは、 $|S \cap N|$  の最小性に矛盾する。

4 の場合、 $\delta$  に沿って  $S'$  を境界圧縮し、更に  $S$  のイソトピーで  $N$  を通過させることにより、 $S \cap N$  のディスクを一枚減らせる。これは、 $|S \cap N|$  の最小性に矛盾する。  $\square$

次の定理は、互いに交わらない圧縮不可能曲面の有限性を保障している。

**定理 2.2.13** ([28]).  $M$  をコンパクト  $3$  次元多様体とする。このとき整数  $c(M)$  が存在して、もし  $S = \{S_1, \dots, S_k\}$  ( $k > c(M)$ ) が  $\text{int}M$  内の互いに交わらない  $2$  次元球面からなる集合ならば、 $M - S$  のある成分の閉包は穴あき球体である。

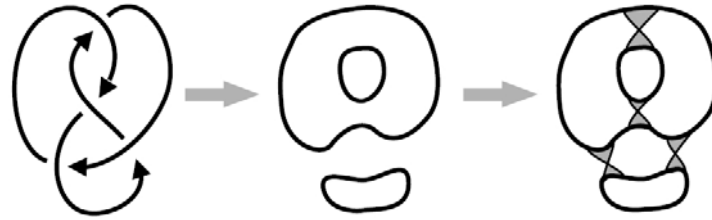
**定理 2.2.14** ([19]).  $M$  をコンパクト既約  $3$  次元多様体とする。このとき整数  $c(M)$  が存在して、もし  $S = \{S_1, \dots, S_k\}$  ( $k > c(M)$ ) が  $\text{int}M$  内の互いに交わらない圧縮不可能両側閉曲面からなる集合ならば、 $M - S$  のある成分の閉包は直積である。

## 2.3 ザイフェルト曲面

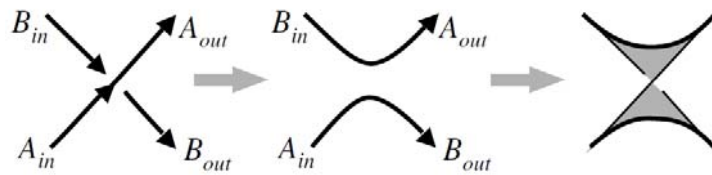
**定義 2.3.1.** 結び目  $K$  に対して、 $S^3$  内に埋め込まれた向き付け可能曲面  $F$  が  $\partial F = K$  を満たすとき、 $F$  を  $K$  のザイフェルト曲面という。

**定理 2.3.2** ([12], [54]). 任意の結び目に対して、ザイフェルト曲面が存在する。

*Proof.* 結び目の正則表示において、向きを付け、各交点でスムージングをする。いくつかのループができるので、互いに交わらないようにディスクを張る。そして、結び目の各交点を復元するように半捻りのバンドをディスクに付ければザイフェルト曲面が得られる。□



Seifert のアルゴリズム



各交点における操作

**定義 2.3.3.**  $K$  のザイフェルト曲面  $F$  のうち種数が最小のものを最小種数ザイフェルト曲面という。最小種数ザイフェルト曲面の種数を  $K$  の種数といい、 $g(K)$  で表す。

**練習問題 2.3.4.**  $K = K_1 \# K_2$  を合成結び目とするととき、次を示せ。

1.  $K$  の最小種数ザイフェルト曲面を  $F$  とするとき、 $F \cap E(K)$  は圧縮不可能かつ境界圧縮不可能である。
2.  $K$  の分解球面を  $S$  とするとき、 $S \cap E(K)$  は圧縮不可能かつ境界圧縮不可能なアニュラスである。
3.  $K$  の最小種数ザイフェルト曲面  $F$  と  $S$  との交わりは一本のアークのみとできる。
4.  $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$  である。

**解答**

1.  $F$  が圧縮可能であると仮定し、 $D$  を  $F$  の圧縮ディスクとする。 $D$  に沿って  $F$  を圧縮して得られる曲面のうち、 $K$  を境界として含む成分を  $F'$  とする。このとき、 $g(F) \geq g(F')$  となり、 $F$  の種数の最小性に矛盾する。

また、 $F$  が境界圧縮可能であると仮定すると、定理 2.2.9 より、 $F$  は境界平行なアニュラスである。しかし、ザイフェルト曲面  $F$  は境界成分が一つであるので、アニュラスではない。

2.  $A = S \cap E(K)$  が圧縮可能であると仮定し、 $D$  を  $A$  の圧縮ディスクとする。 $\partial D$  はアニュラス  $A$  内の本質的なループであるから、 $A$  を二つのアニュラスに分離する。従って、 $A$  を  $D$  に沿って圧縮すると、二つのディスク  $A'_1$  と  $A'_2$  が得られる。 $\partial A'_1$  は、 $K$  と 1 点で交わるような  $N(K)$  内のディスク  $D'$  を張る。 $A'_1 \cup D'$  は  $K$  と 1 点で交わる 2 次元球面である。これは、 $A'_1 \cup D'$  が  $S^3$  内で非分離であることを意味し、定理 2.2.1 に反する。

また、 $A = S \cap E(K)$  が境界圧縮可能であると仮定すると、定理 2.2.9 より、 $F$  は境界平行なアニュラスである。これは、 $K_1$  又は  $K_2$  が自明な結び目であることを意味するので、 $K = K_1 \# K_2$  が合成結び目であることに反する。

3. (a) より、 $F \cap E(K)$  は圧縮不可能かつ境界圧縮不可能である。また、(b) より、 $S \cap E(K)$  は境界圧縮不可能である。 $E(K)$  が既約かつ境界既約であるから、定理 2.2.8 より、 $F \cap E(K)$  と  $S \cap E(K)$  のイソトピーで、 $(F \cap E(K)) \cap (S \cap E(K))$  の各成分が  $F \cap E(K)$  内でも  $S \cap E(K)$  内でも本質的であるようにできる。 $S$  は  $K$  と 2 点で交わり、 $\partial F = K$  であるから、 $\partial(F \cap E(K))$  と  $\partial(S \cap E(K))$  は 2 点で交わる。従って、 $(F \cap E(K)) \cap (S \cap E(K))$  のアーク成分は 1 つである。また、アニュラス  $S \cap E(K)$  上の本質的なアークと本質的なループは共存しないので、 $(F \cap E(K)) \cap (S \cap E(K))$  は 1 本のアークのみである。

4.  $K_1$  と  $K_2$  の最小種数ザイフェルト曲面をそれぞれ  $F_1$  と  $F_2$  とする。 $\partial F_1$  の一部と  $\partial F_2$  の一部を貼り合わせることにより、 $K = K_1 \# K_2$  のザイフェルト曲面  $F = F_1 \# F_2$  を得る。このとき、 $g(K_1) + g(K_2) = g(F_1) + g(F_2) = g(F) \geq g(K) = g(K_1 \# K_2)$  である。

$F$  を  $K$  の最小種数ザイフェルト曲面とし、 $S$  を  $K$  の分解球面とする。(a) より  $F \cap E(K)$  は圧縮不可能かつ境界圧縮不可能であり、(b) より  $S \cap E(K)$  は圧縮不可能かつ境界圧縮不可能なアニュラスであるから、(c) より、 $F$  と  $S$  との交わりは一本のアークのみとできる。よって、 $F$  は  $S$  により、 $K_1$  のザイフェルト曲面  $F_1$  と  $K_2$  のザイフェルト曲面  $F_2$  に分解される。このとき、 $g(K_1 \# K_2) = g(K) = g(F) = g(F_1) + g(F_2) \geq g(K_1) + g(K_2)$  である。

二つの結び目  $K_1$  と  $K_2$  のバンド和  $K_1 \#_b K_2$  に関して、次の超加法性が知られている。

定理 2.3.5 ([15], [55]).  $g(K_1 \#_b K_2) \geq g(K_1) + g(K_2)$

定義 2.3.6.  $F$  を  $K$  のザイフェルト曲面とし、 $F \cap N(K) = N(\partial F; F)$  となるようイソトープしておく。このとき、 $F \cap \partial N(K)$  を  $K$  のロンジチュードという。また、 $N(K)$  のメリディアンディスクの境界を  $K$  のメリディアンという。メリディアンとロンジチュードは 1 点で交わるようにしておく。

命題 2.3.7.  $K$  が自明であるための必要十分条件は  $E(K)$  内に本質的なディスクが存在することである。

*Proof.* ( $\Rightarrow$ )  $K$  が自明であるから、ディスク  $D$  で  $\partial D = K$  となるものが存在する。 $D \cap E(K)$  は本質的なディスクである。

( $\Leftarrow$ )  $F$  を  $K$  のザイフェルト曲面とする。可能な限り  $F$  を圧縮することにより、 $F$  を圧縮不可能にできる。 $F$  は境界成分が一つの向き付け可能曲面であるから、定理 2.2.9 より、 $F$  は境界圧縮不可能である。 $D$  を  $E(K)$  内の本質的なディスクとする。定理 2.2.8 より、 $F$  と  $D$  のイソトピーで  $F \cap D = \emptyset$  とできる。トラス  $\partial E(K)$  上で  $\partial F$  と  $\partial D$  は平行であるので、 $\partial D$  は  $K$  のロンジチュードである。よって、 $D$  は  $K$  のザイフェルト曲面に延長できるので、 $K$  は自明である。  $\square$

定理 2.3.8 ([20]). *A. Hatcher, On the boundary curves of incompressible surfaces, Pacific J. Math. 99 (1982) 373-377.*

定義 2.3.9. ザイフェルト曲面  $F$  に対して、2 次元球面  $S$  が存在して、 $F \cap S$  が一枚のディスクであるとする。 $S$  は  $S^3$  を二つの 3 次元球体  $B_1$  と  $B_2$  に分け、 $F$  を二枚のザイフェルト曲面  $F_1 = F \cap B_1$  と  $F_2 = F \cap B_2$  に分けている。このとき、 $F$  は  $F_1$  と  $F_2$  に村杉分解されたといい、 $F = F_1 * F_2$  と表す。逆に、 $F$  は  $F_1$  と  $F_2$  から村杉和によって得られるという。

定理 2.3.10 ([13]).  $F = F_1 * F_2$  をザイフェルト曲面とする。

1.  $F_1$  と  $F_2$  が圧縮不可能ならば、 $F$  は圧縮不可能である。
2.  $F_1$  と  $F_2$  が最小種数ならば、 $F$  は最小種数である。

ザイフェルト曲面はステイト曲面に拡張され、更に、Gabaiの結果は向き付け不可能曲面へ拡張されている。

定理 2.3.11 ([50]).  $F = F_1 * F_2$  を曲面とする。このとき、 $F_1$  と  $F_2$  が  $\pi_1$ -本質的ならば、 $F$  も  $\pi_1$ -本質的である。

### 2.3.1 ザイフェルト曲面から得られる不変量

$K$  を方向のついた結び目または絡み目とし、 $F$  を  $K$  のザイフェルト曲面とする。ザイフェルト行列  $M$  とアレキサンダー多項式  $\Delta_K(t)$  を

$$M = [lk(\alpha_i, \alpha_j^*)]$$

$$\Delta_K(t) = t^{-\frac{k}{2}} \det(M - tM^T)$$

で定める。ここで、 $k$  は  $M$  の次数とする。

定理 2.3.12.  $K$  を結び目、 $g(K)$  を  $K$  の種数とすると、

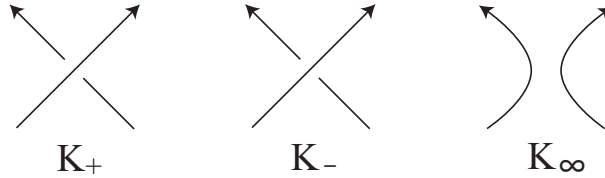
$$g(K) \geq \deg \Delta_K(t)$$

定義 2.3.13. 以下の公理により定義される多項式をコンウェイ多項式という。

公理 1 :  $\nabla(\bigcirc) = 1$

公理 2 :  $\nabla\left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array}\right) - \nabla\left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array}\right) = z \nabla\left(\begin{array}{c} \bigcirc \end{array}\right)$

注 2.3.14. 公理 2 より、 $\deg \nabla_{K_+}(z)$ ,  $\deg \nabla_{K_-}(z)$ ,  $\deg \nabla_{K_\infty}(z) - 1$  を大きい順 ( $d_1 \geq d_2 \geq d_3$ ) に並べた時、 $d_1 = d_2 \geq d_3$  となる。



定理 2.3.15. アレキサンダー多項式とコンウェイ多項式の間に次の関係式が成り立つ。

$$\Delta_K(t) = \nabla_K\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

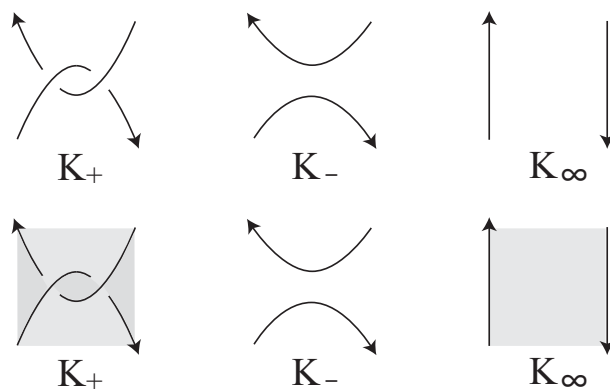
絡み目  $L$  に対し、 $L$  のザイフェルト曲面  $F$  の最大オイラー標数を  $\chi(L)$  で表す。

定理 2.3.16 (G. Torres, 1953).  $K$  を絡み目とすると、 $\deg \nabla_K(z) \leq 1 - \chi(K)$  が成り立つ。

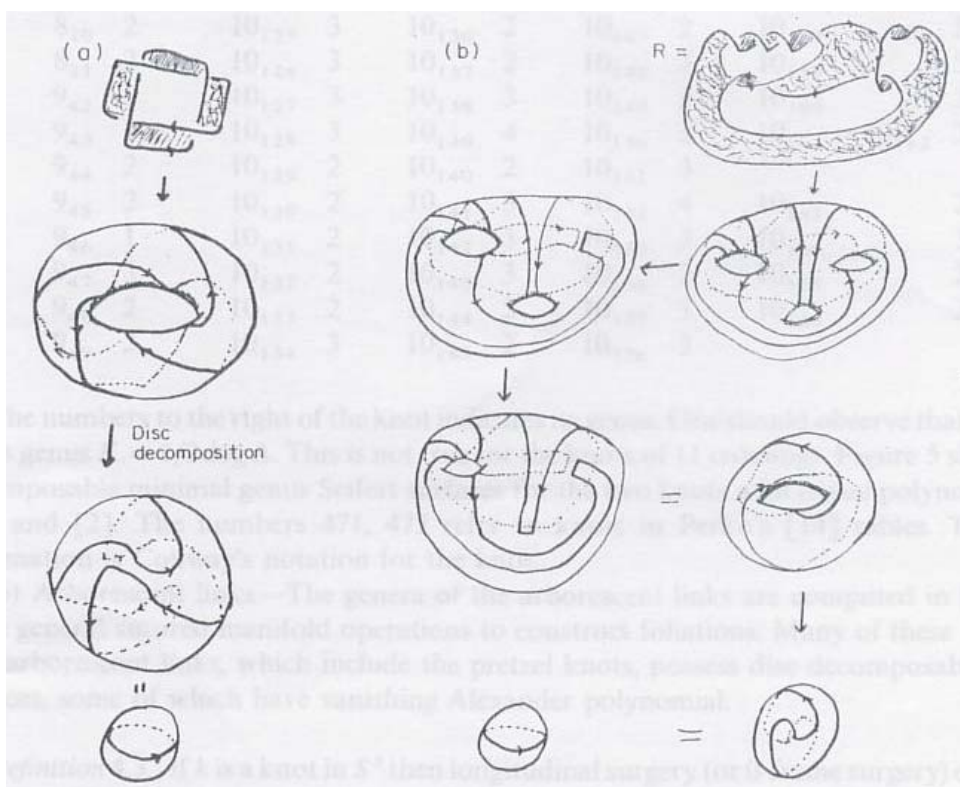
定理 2.3.17 (R. Crowell, 1959).  $K$  を非分離的交代絡み目とすると、 $\deg \nabla_K(z) = 1 - \chi(K)$  が成り立つ。

定理 2.3.18 ([56]).  $\chi(K_+)$ ,  $\chi(K_-)$ ,  $\chi(K_\infty) - 1$  を小さい順 ( $\chi_1 \leq \chi_2 \leq \chi_3$ ) に並べた時、 $\chi_1 = \chi_2 \leq \chi_3$  となる。

定理 2.3.19 ([56]).  $\chi(K_+) = \chi(K_\infty) - 1 < \chi(K_-)$  のとき、 $K_+$  と  $K_\infty$  の最大オイラー標数ザイフェルト曲面  $S'$  と  $S$  で、 $S'$  は  $S$  にホップバンドをプランピングして得られるものが存在する。



定理 2.3.20 ([14]).  $L$  を絡み目とし、 $F$  を  $L$  のザイフェルト曲面とする。 $F$  がディスク分解可能ならば、 $F$  は最小種数である。



定理 2.3.21 ([14]). 非分離的交代絡み目の標準的ザイフェルト曲面はディスク分解可能である。従って、最小種数である。

対称行列  $M + M^T$  を対角化し、対角成分を  $a_1, \dots, a_k$  とする。 $K$  の符号数  $\sigma(K)$  を以下の式で定義する。

$$\sigma(K) = (\text{正の } a_i \text{ の数}) - (\text{負の } a_i \text{ の数})$$

定理 2.3.22.  $K^*$  を  $K$  の鏡像とすると、

$$\sigma(K^*) = -\sigma(K)$$

従って、 $K$  がもろて型ならば、 $\sigma(K) = 0$  となる。

練習問題 2.3.23.  $3_1$  と  $4_1$  がもろて型かどうか判定せよ。

定理 2.3.24.

$$\sigma \left( \begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) - \sigma \left( \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array} \right) = 0 \text{ または } -2$$

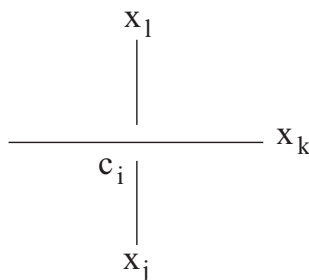
従って、 $K$  の結び目解消数を  $u(K)$  とすると、 $|\sigma(K)| \leq 2u(K)$  が成り立つ。

練習問題 2.3.25.  $5_1$  と  $7_3$  の種数と結び目解消数を決定せよ。

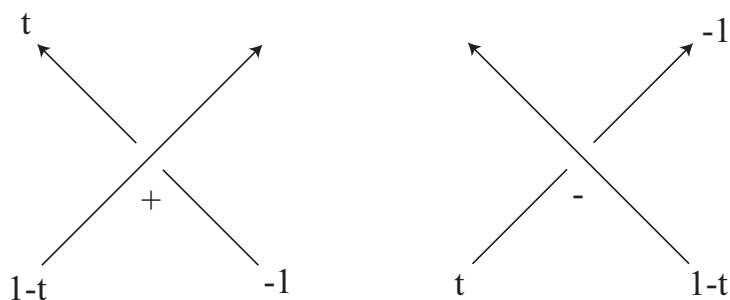
定理 2.3.26 (Murasugi, 1965).  $L$  を絡み目とし、 $L$  からバンド  $b$  によって得られる絡み目を  $L_b$  とするとき、 $|\sigma(L) - \sigma(L_b)| \leq 1$  が成り立つ。

## アレキサンダー行列とアレキサンダー多項式

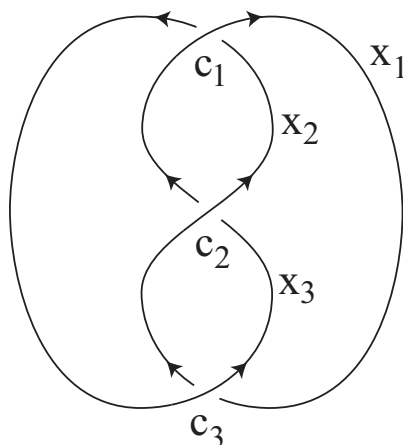
$K$  を結び目とし、 $D$  を  $K$  の正則表示とする。 $D$  の交差点を  $c_1, \dots, c_n$  とし、 $D$  のアークを  $x_1, \dots, x_n$  とする。



各交差点  $c_i$  における符号が  $+$  の場合、左図のように  $-1$ ,  $1-t$ ,  $t$  を  $D$  のアーク  $x_j$ ,  $x_k$ ,  $x_l$  に割り振る。  
(各交差点  $c_i$  における符号が  $-$  の場合、右図のように  $t$ ,  $1-t$ ,  $-1$  を  $D$  のアーク  $x_j$ ,  $x_k$ ,  $x_l$  に割り振る。)



交差点  $c_i$  における符号が  $+$  の場合、第  $i$  行において、第  $j$  列に  $-1$  を、第  $k$  列に  $1-t$  を、第  $l$  列に  $t$  を、その他の列には  $0$  を成分として持つような行列を作る。(交差点  $c_i$  における符号が  $-$  の場合、第  $i$  行において、第  $j$  列に  $t$  を、第  $k$  列に  $1-t$  を、第  $l$  列に  $-1$  を、その他の列には  $0$  を成分として持つような行列を作る。)



$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 \\ c_1 & \begin{pmatrix} 1-t & -1 & t \\ t & 1-t & -1 \\ -1 & t & 1-t \end{pmatrix} \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix}$$

以上のように作られた行列の最後の行と最後の列を削除して得られる行列をアレキサンダー行列という。

$$A = \begin{pmatrix} 1-t & -1 \\ t & 1-t \end{pmatrix}$$

アレキサンダー行列  $A$  の行列式  $\det A$  をアレキサンダー多項式という。

$$\Delta_K(t) = \det A = 1 - t + t^2$$

但し、このように作られたアレキサンダー多項式は、一意に定まらない。しかしながら、次が成り立つ。

定理 2.3.27.  $\Delta_K(t)$  と  $\Delta'_K(t)$  をアレキサンダー多項式とすると、ある整数  $k$  が存在して、

$$\Delta_K(t) = \pm t^k \Delta'_K(t)$$

となる。

実際、上記の例では、

$$\Delta_K(t) = t(t^{-1} - 1 + t)$$

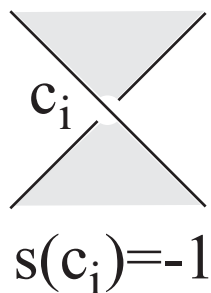
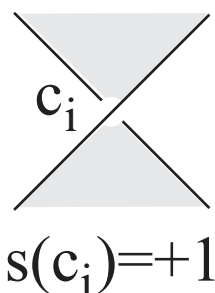
が成り立つ。

問 1 .  $4_1$  のアレキサンダー行列を求め、アレキサンダー多項式を計算せよ。

## ゲーリッツ行列と符号数

$K$  を結び目とし、 $D$  を  $K$  の正則表示とする。 $D$  の領域を白と黒でチェッカーボード彩色する。 $D$  の交差点を  $c_1, \dots, c_n$  とし、白領域を  $W_1, \dots, W_m$  とする。

交差点  $c_i$  に対して、以下のように符号  $s(c_i)$  を定める。

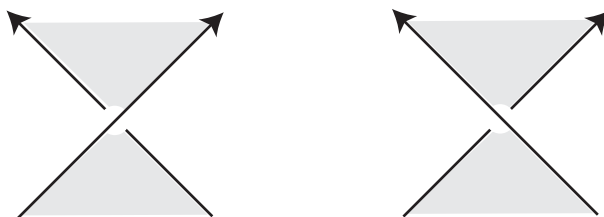


次のように定められた成分を持つ行列を作り、最後の行と最後の列を削除して得られる行列をゲーリッツ行列という。

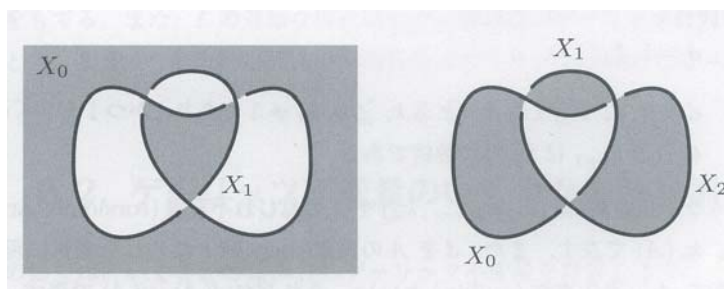
- $g_{ii} = \sum_{c_k \in \partial W_i} s(c_k)$
- $g_{ij} = - \sum_{c_k \in \partial W_i \cap \partial W_j} s(c_k)$

ゲーリッツ行列  $G$  を対角化して得られる符号数を  $sign(G)$  で表す。

また、向きを付けた正則表示  $D$  に対して、下図のような交差点の符号の和を  $\mu(D)$  とおく。



定理 2.3.28 ( ( Gordon-Litherland, 1978 ) ).  $\sigma(K) = sign(G) - \mu(D)$



左図の場合、

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

という行列が得られるので、ゲーリッツ行列は、

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

となる。従って、 $sign(G) = -2$  である。また、 $\mu(D) = 0$  である。以上より、 $\sigma(K) = -2 - 0 = -2$  と符号数が求められる。

右図の場合、

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

という行列が得られるので、ゲーリッツ行列は、

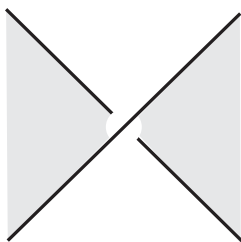
$$G = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

となる。従って、 $\text{sign}(G) = 1$  である。また、 $\mu(D) = 3$  である。以上より、 $\sigma(K) = 1 - 3 = -2$  と符号数が求められる。

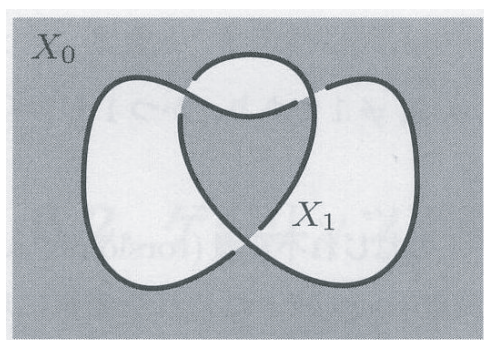
問 2 .  $4_1$  のゲーリッツ行列を求め、符号数を計算せよ。

## 交代結び目の符号数とアレキサンダー多項式

定理 2.3.29 (Gordon-Litherland, 1978).  $K$  を交代結び目とし、 $D$  を  $K$  の交代正則表示とする。 $D$  を下図のようにチェッカーボード彩色するとき、 $\sigma(K) = (\text{黒領域の個数}) - (\text{正の交差点の個数}) - 1$  が成り立つ。



例 2.3.30. 下図の交代正則表示にて、黒領域の個数は 2、正の交差点の個数は 3 であるから、 $\sigma(K) = 2 - 3 - 1 = -2$  が得られる。



定理 2.3.31 (Murasugi, 1960).  $K$  を交代結び目とし、

$$\Delta_K(t) = a_{-m}t^{-m} + a_{-m+1}t^{-m+1} + \cdots + a_mt^m$$

をアレキサンダー多項式とする。このとき、

1.  $a_i \neq 0$  ( $i = -m, -m+1, \dots, m$ )
2.  $a_ia_{i+1} < 0$  ( $i = -m, -m+1, \dots, m-1$ )

が成り立つ。即ち、交代結び目のアレキサンダー多項式は交代多項式であると言える。

例 2.3.32.  $K = 8_{19}$  のアレキサンダー多項式は、

$$\Delta_K(t) = t^{-3} - t^{-2} + 1 - t^2 + t^3$$

であるから、条件 1 を満たさない。従って、 $8_{19}$  は交代結び目ではないことが分かる。

## 交代結び目に関する主結果

定理 2.3.33 ([8], [39], [14]). 交代結び目  $K$  の交代正則表示からザイフェルトのアルゴリズムで得られるザイフェルト曲面の種数は、 $K$  の最小種数に等しい。

定理 2.3.34 ([33]). 交代結び目  $K$  の既約な交代正則表示が素ならば、 $K$  は素である。

( $2, n$ ) 型トーラス結び目でない交代結び目は双曲的である。

定理 2.3.35 (テイトの第 1 予想, [26], [40], [59]). 交代結び目  $K$  の既約な交代正則表示の交点数は、 $K$  の最小交点数に等しい。

逆に、 $K$  の最小交点数を与える既約な正則表示は交代正則表示に限る。

定理 2.3.36 (テイトの第 2 予想). 交代結び目  $K$  の既約な交代正則表示  $D_1, D_2$  は、同じねじり数を持つ。即ち、 $w(D_1) = w(D_2)$  である。

系 2.3.37. 交代結び目  $K$  がもろ手型ならば、 $K$  の既約な交代正則表示  $D$  のねじり数は 0 である。

特に、最小交点数が奇数である交代結び目はもろ手型でない。

定理 2.3.38 (テイトの反転予想, [34], [35]). 交代結び目  $K$  の既約な交代正則表示  $D_1, D_2$  は、有限回の反転で移り合う。

## 2.4 閉曲面

命題 2.4.1. 結び目  $K$  が非自明であるための必要十分条件は、 $\partial E(K)$  が  $E(K)$  内で圧縮不可能であることである。

*Proof.* ( $\Rightarrow$ )  $\partial E(K)$  が  $E(K)$  内で圧縮可能であるとし、 $D$  を圧縮ディスクとする。 $\partial D$  は  $\partial E(K)$  上本質的であるので、 $D$  は  $E(K)$  内で本質的である。従って、命題 2.3.7 より、 $K$  は自明である。

( $\Leftarrow$ )  $K$  が自明ならば、命題 2.3.7 より、 $E(K)$  内に本質的なディスクが存在する。即ち、 $\partial E(K)$  は圧縮可能である。□

命題 2.4.1 より、自明でない結び目の外部には少なくとも一つの圧縮不可能なトーラスが存在する。しかしながら、命題 2.4.1 で得られた圧縮不可能なトーラスは、境界平行であるので、本質的ではない。

定義 2.4.2. 結び目  $K$  がスモールであるとは、 $E(K)$  が本質的な閉曲面を含まないときをいう。

言い換えると、スモール結び目  $K$  の外部  $E(K)$  内の任意の圧縮不可能閉曲面は境界平行である。

今まで知られているスモール結び目のクラスとして以下がある。

- トーラス結び目
- 2 橋結び目
- 長さ 3 のモンテシノス結び目
- 2 本捻りのトーラス結び目

次の問題は未解決である。

問題 2.4.3. スモール結び目を特徴付けよ。

$K$  を結び目とし、 $F$  を  $S^3 - K$  内の圧縮不可能閉曲面とする。 $F$  は  $S^3 - K$  では圧縮不可能であるが、定理 2.2.2 より、 $S^3$  内では圧縮可能である。 $F$  が球面でない場合、 $F$  の  $S^3$  内での圧縮ディスク  $D$  が存在する。 $D$  は  $K$  と横断的に交わるとしてよい。 $D$  と  $K$  の最小交点数を  $n(D)$  とおき、 $F$  の全ての圧縮ディスク  $D$  に関して  $n(D)$  の最小値を  $F$  のウエストといい、 $w(F)$  で表す。また、 $S^3 - K$  の全ての圧縮不可能閉曲面  $F$  に関して  $w(F)$  の最大値を  $K$  のウエストといい、 $w(K)$  で表す。

命題 2.4.1 より、 $K$  が非自明ならば、 $w(K) \geq 1$  である。 $K$  が自明な結び目の場合は、 $w(K) = 0$  と定める。

練習問題 2.4.4.  $K$  が  $n$  橋結び目のとき、 $w(K) \leq n - 1$  が成り立つことを示せ。

練習問題 2.4.5.  $F$  を  $E(K)$  内に適切に埋め込まれた圧縮不可能曲面で、 $\partial F \neq \emptyset$  かつ  $\partial F$  はメリディアンに平行でないとする。このとき、 $w(K) = 1$  ならば、 $F$  は自由である。即ち、 $E(K) - \text{int}N(F)$  の各成分はハンドル体であることを示せ。

## メリディアンの圧縮不可能曲面

$F$  を  $S^3 - K$  内の圧縮不可能閉曲面で、 $w(F) = 1$  とする。このとき、 $F$  の  $S^3$  内の圧縮ディスク  $D$  で、 $K$  との交点数が 1 のものが存在する。 $D$  で  $F$  を圧縮して得られる曲面を  $F'$  とする。 $F'$  は  $K$  と 2 点で交わる閉曲面である。また、 $F$  の圧縮不可能性より、 $F' - K$  は  $S^3 - K$  で圧縮不可能であることが分かる。 $F'$  は  $F$  から  $D$  に沿ってメリディアンの圧縮によって得られたという。一般に、次の定義がなされる。

定義 2.4.6.  $F$  を  $K$  と横断的に交わる閉曲面で、 $F - K$  が  $S^3 - K$  内で圧縮不可能であるとする。 $F$  が  $K$  と 2 点で交わる球面以外の場合は、次を満たすディスク  $D$  が存在するとき、 $F$  はメリディアンの圧縮可能であるといい、 $D$  をメリディアンの圧縮ディスクという。

- $D \cap F = \partial D$
- $D$  は  $K$  と 1 点で横断的に交わる
- $\partial D$  が  $F$  上非本質的ならば、 $\partial D$  が  $F$  上張るディスク  $D'$  は  $K$  と 2 点以上で交わる

$F$  が  $K$  と 2 点で交わる球面の場合は、 $F \cap E(K)$  が境界平行であるとき  $F$  はメリディアンの圧縮可能であるという。

いずれの場合も、 $F$  がメリディアンの圧縮可能でないとき、メリディアンの圧縮不可能であるという。

定義 2.4.7.  $K$  がメリディアンのスモールであるとは、圧縮不可能かつメリディアンの圧縮不可能な閉曲面が存在しないときをいう。

言い換えると、メリディアンのスモール結び目  $K$  の外部  $E(K)$  は、境界が  $K$  のメリディアンに平行であるような本質的な曲面を含まない。

定理 2.4.8 ([10]).  $K$  がスモールならば、メリディアンのスモールである。

注 2.4.9. 逆は成り立たない。

練習問題 2.4.10. 三葉結び目の  $(2, p)$  ケーブル結び目は、メリディアンのスモールであるが、スモールではないことを示せ。

## 付属的曲面

定義 2.4.11.  $F$  を  $E(K)$  内の圧縮不可能閉曲面とする。次を満たすアニュラス  $A$  が  $E(K)$  内に存在するとき、 $F$  は付属的であるといい、 $A$  を付属的アニュラスという。

- $A \cap F = l_1$  かつ、 $l_1$  は  $F$  上本質的なループ
- $A \cap \partial E(K) = l_2$

ここで、 $\partial A = l_1 \cup l_2$  とする。

定理 2.4.12 ([22]).  $F$  を付属的曲面とする。 $F$  の付属的アニュラス  $A$  が定めるスロープ  $l_2$  は、付属的アニュラスの選び方に因らず一意である。

$F$  の付属的アニュラス  $A$  が定めるスロープ  $l_2$  を、 $F$  の付属的スロープという。

定理 2.4.13 ([10]). 付属的曲面  $F$  の付属的スロープは、 $\infty$  か整数である。

定義 2.4.14.  $S$  を  $E(K)$  内に適切に埋め込まれた本質的な曲面で、境界が空でないものとする。次を満たすとき、 $S$  は強本質的であるという。

- $E(K) - \text{int}N(F)$  の少なくとも一つの成分は、境界既約である。

定理 2.4.15 ([22]). 次は同値である。

1. 付属的スロープ  $r$  の付属的曲面  $F$  が存在する。
2. 境界スロープ  $r$  の強本質的曲面  $S$  が存在する。

更に、これらの条件の一つが成り立てば、もう一つの条件は  $F \cap S = \emptyset$  となるように満たされる。

### 2.4.1 タングル分解

$F$  を  $K$  と  $2n$  ( $n \geq 1$ ) 点で横断的に交わる球面とする。定理 2.2.1 より、 $F$  は  $S^3$  を二つの 3 次元球体  $B_1$  と  $B_2$  に分ける。従って、 $K$  も  $n$  本のアークの組  $T_1 = K \cap B_1$  と  $T_2 = K \cap B_2$  に分けられる。 $(B_i, T_i)$  を  $n$  系タングルといい、この分解  $(S^3, K) = (B_1, T_1) \cup_F (B_2, T_2)$  を  $K$  の  $n$  系タングル分解という。また、 $F$  を  $n$  系タングル分解球面という。

定義 2.4.16.  $n$  系タングル  $(B, T)$  が次を満たすとき、自明であるという。

- $T = t_1 \cup \dots \cup t_n$  に対し、ディスク  $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$  が存在し、 $D_i \cap T = \partial D_i \cap t_i = t_i$  かつ  $D_i \cap \partial B = \partial D_i - \text{int}t_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )

定義 2.4.17.  $n$  系タングル  $(B, T)$  が次を満たすとき、本質的であるという。

- $\partial B - \text{int}N(\partial T)$  が  $E(T) = B - \text{int}N(T)$  内で圧縮不可能かつ境界圧縮不可能

定義 2.4.18.  $n$  系タングル  $(B, T)$  が次を満たすとき、自由であるという。

- $E(T)$  がハンドル体

定義 2.4.19. タングル分解  $(S^3, K) = (B_1, T_1) \cup_F (B_2, T_2)$  が自明（本質的、自由）であるとは、 $(B_1, T_1)$  と  $(B_2, T_2)$  の両方とも自明（本質的、自由）であるときをいう。

$K$  が  $n$  系合成であるとは、本質的  $n$  系タングル分解が存在するときをいう。また、 $n$  系素であるとは、本質的  $n$  系タングル分解が存在しないときをいう。

ある  $n$  に対して  $K$  が  $n$  系合成ならば、本質的  $n$  系タングル分解球面  $F$  より、メリディアンに平行な境界を  $2n$  個持つ本質的平面的曲面  $F \cap E(K)$  が存在する。従って、 $K$  はメリディアン的小モジュールではない。更に、定理 2.4.8 より、 $K$  は小モジュールではないことが従う。よって、トーラス結び目、2 橋結び目、長さ 3 のモンテシノス結び目、2 本捻りのトーラス結び目は、任意の  $n$  に対して  $n$  系素である。

定理 2.4.20 ([18]). トンネル数 1 の結び目は任意の  $n$  に対して  $n$  系素である。

定理 2.4.21 ([45]). 自由種数 1 の結び目は任意の  $n$  に対して  $n$  系素である。

問題 2.4.22. 任意の  $n$  に対して、 $n$  系素である結び目を特徴付けよ。

問題 2.4.23. ダブルトーラス結び目の本質的タングル分解を特徴付けよ。

$G$  を平面的グラフとする。埋め込み  $f: G \rightarrow S^3$  又はその像  $\gamma = f(G)$  を  $G$  の空間グラフという。空間グラフ  $\gamma \subset S^3$  が自明であるとは、 $\gamma$  を含む球面が存在するときをいう。

$\gamma \subset S^3$  が平坦であるとは、任意の部分空間グラフ  $\gamma' \subset \gamma$  が自由、即ち、 $E(\gamma')$  がハンドル体であるときをいう。

定理 2.4.24 ([57]).  $\gamma$  が自明である為の必要十分条件は、 $\gamma$  が平坦であることである。

$n$  系タングル  $(B, T)$  の境界  $\partial B$  に 3 次元球体  $B'$  を貼り合わせ、3 次元球面  $B \cup B'$  内の空間グラフ  $\gamma = B' \cup T/B'$  を得る。このときのグラフ  $G$  はブーケである。逆に、ブーケ  $G$  の空間グラフ  $\gamma$  から、 $G$  の頂点の近傍  $V$  を  $S^3$  から取り除くことにより、タングル  $(S^3 - \text{int } V, \gamma \cap (S^3 - \text{int } V))$  を得る。この対応により、 $n$  系タングル  $(B, T)$  とブーケの空間グラフは一対一に対応する。よって、定理 2.4.24 から次の系が導かれる。

系 2.4.25 ([16]).  $(B, T)$  を  $n$  系タングルとする。 $(B, T)$  が自明である為の必要十分条件は、任意の部分系  $T' \subset T$  に対して、 $E(T')$  がハンドル体となることである。

定義 2.4.26.  $\gamma$  が次を満たすとき、最小埋蔵という。

1. 任意の真部分空間グラフ  $\gamma' \subset \gamma$  が自明であり、かつ
2.  $\gamma$  自身は非自明

定理 2.4.27 ([47]).  $\gamma$  が最小埋蔵ならば、 $E(\gamma)$  は境界既約である。

系 2.4.28.  $(B, T)$  が次を満たすならば、 $E(T)$  は境界既約である。

1. 任意の真部分タングル  $(B, T') \subset (B, T)$  が自明であり、かつ
2.  $(B, T)$  自身は非自明

## 2.4.2 補間曲面

定義 2.4.29. 結び目  $K$  に対して、閉曲面  $F$  が次を満たすとき、 $F$  を  $K$  の補間曲面という。

- $F \supset K$
- $F - K$  は連結
- $F \cap E(K)$  は  $E(K)$  内で本質的

例 2.4.30. 非自明なトーラス結び目  $K$  に対して、 $K$  を含むトーラスは補間曲面である。

予想 2.4.31 ([41]). 任意の結び目に対して、補間曲面が存在する。

Neuwirth Conjecture は、交代結び目についても成り立つことが知られている ([48])。

## 第3章 結び目の位置

### 3.1 正則表示

#### 3.1.1 交代結び目

#### 3.1.2 正結び目

#### 3.1.3 モンテシノス結び目

**定理 3.1.1** ([44]). *A Montesinos link  $K(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n})$  with  $q_i \geq 2$  is hyperbolic if it is not a torus link and not equivalent to  $K(1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$ ,  $K(2/3, -1/3, -1/3)$ ,  $K(1/2, -1/4, -1/4)$ ,  $K(1/2, -1/3, -1/6)$  or the mirror image of these links.*

*The complement of a Montesinos link contains an incompressible torus if and only if the link is in family III, with  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ .*

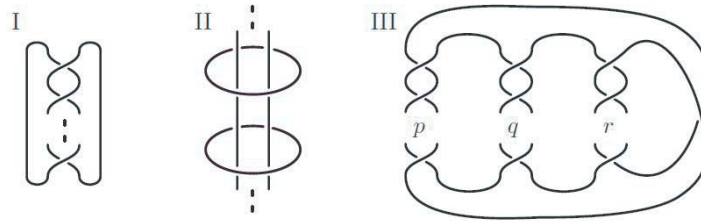
#### 3.1.4 充足結び目

#### 3.1.5 均質結び目

#### 3.1.6 代数的結び目

**定理 3.1.2** ([6]). *The following three families, shown in Figure 1.3, form a complete list of non-hyperbolic arborescent links:*

1.  $K$  is a  $(2, n)$ -torus link,
2.  $K$  has two isotopic components, each of which bounds an annulus properly embedded in  $S^3 - K$ ,
3.  $K$  or its reflection is the pretzel link  $P(p, q, r, -1)$ , where  $p, q, r \geq 2$  and  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$ .



The three exceptional families of non-hyperbolic arborescent links.

## 3.2 モース関数とヒーガード分解

$M$  を  $m$  次元多様体とし、 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  を滑らかな関数とする。

定義 3.2.1. 点  $p \in M$  が  $f$  の臨界点であるとは、 $p$  の周りの局所座標系  $(x_1, \dots, x_m)$  に対して、

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ )

を満たすときをいう。また、 $p$  が非退化であるとは、

- $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_i)\right) \neq 0$

を満たすときをいう。

例 3.2.2. グラフ  $y = x^3$  において、 $x = 0$  は退化な臨界点である。一方、摂動させたグラフ  $y = x^3 + ax + b$  において、 $a > 0$  ならば退化な臨界点  $x = 0$  は消滅し、 $a < 0$  ならば二つの非退化な臨界点  $x = \pm\sqrt{\frac{-a}{3}}$  に分裂する。

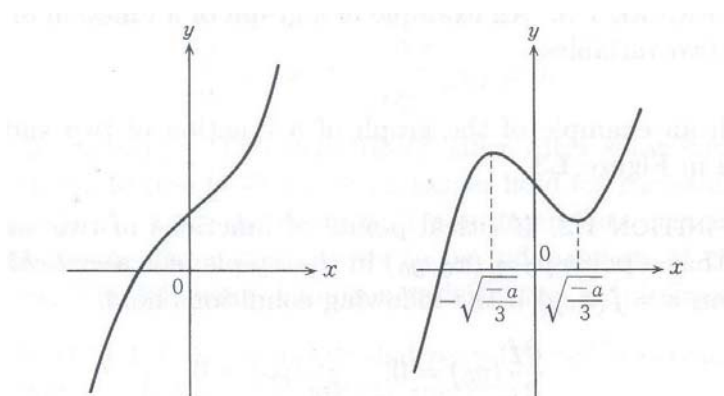


FIGURE 1.2. The graphs of  $y = x^3 + ax + b$ :  $a > 0$  (left),  $a < 0$  (right)

定理 3.2.3 (Morse). 任意の  $m$  次元多様体  $M$  に対し、次を満たす滑らかな関数  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  が存在する。

- $f$  の各臨界点  $p_i$  は非退化である。

更に、次を満たすように、 $p_i$  の周りの局所座標系  $(X_1, \dots, X_m)$  を選べる。

- $f = -X_1^2 - \dots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \dots + X_m^2 + c_i$

ここで、 $c_i = f(p_i)$  である。

$f$  は  $M$  上のモース関数と呼ばれる。 $\lambda$  を  $p_i$  の指数という。

例 3.2.4.  $M$  が 2 次元の場合、臨界点は 3 つのタイプがある。

指数 1  $f(x, y) = x^2 + y^2 + c_i$

指数 2  $f(x, y) = x^2 - y^2 + c_i$

指数 3  $f(x, y) = -x^2 - y^2 + c_i$

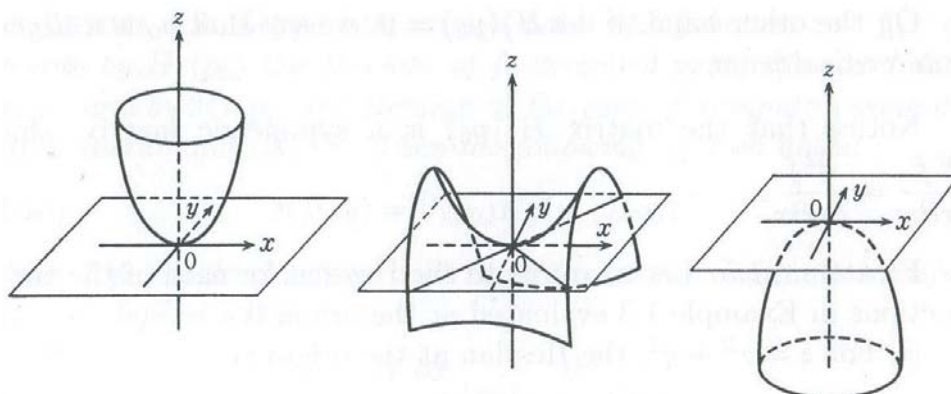


FIGURE 1.4. The graphs of  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = x^2 - y^2$ , and  $z = -x^2 - y^2$ , respectively from the left

例 3.2.5.  $M$  が 3 次元の場合、臨界点は 4 つのタイプがある。

指数 1  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + c_i$

指数 2  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + c_i$

指数 3  $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 + c_i$

指数 4  $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + c_i$

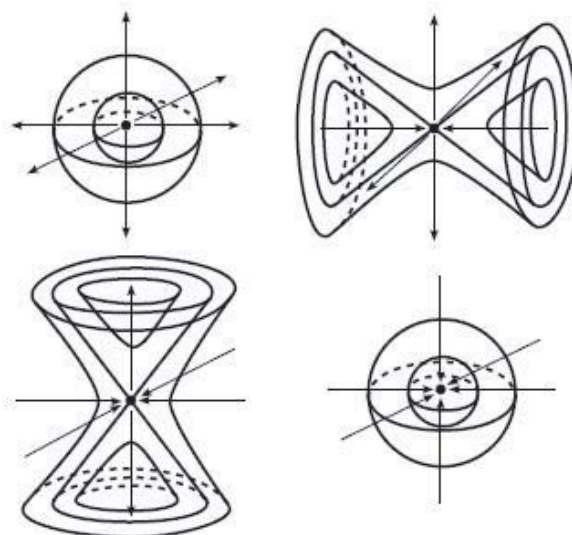


FIGURE 4. The four types of critical points for a Morse function on a 3-manifold are shown via level sets. The arrows indicate the directions in which the function is increasing.

$M_t = \{p \in M \mid f(p) \leq t\}$  と置く。

定理 3.2.6 (Morse).  $M_{c_i+\epsilon}$  は、 $M_{c_i-\epsilon}$  に  $\lambda$ -ハンドルを付着して得られる多様体に微分同相である。即ち、

$$M_{c_i+\epsilon} \cong M_{c_i-\epsilon} \cup (D^\lambda \times D^{m-\lambda})$$

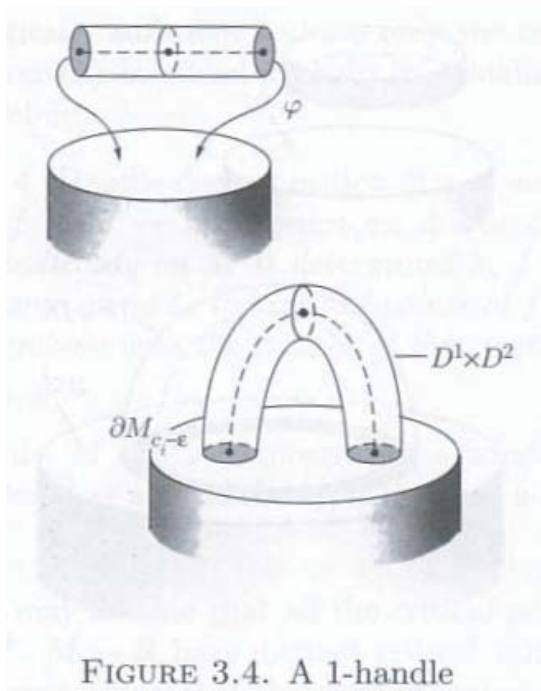


FIGURE 3.4. A 1-handle

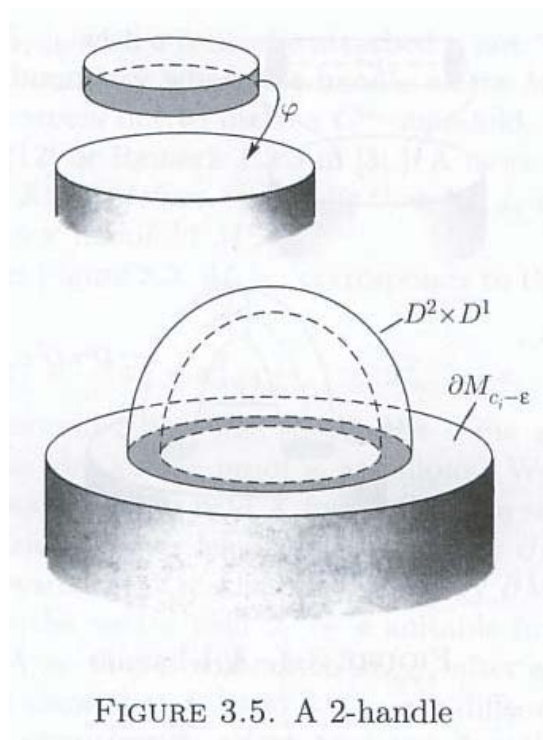


FIGURE 3.5. A 2-handle

定理 3.2.7 (Heegaard). 任意の向き付け可能閉 3次元多様体  $M$  に対し、次を満たすモース関数  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  が存在する。

- 相当するハンドル分解が以下の順序を持つ。

$$M = h^0 \cup (h_1^1 \cup \cdots \cup h_k^1) \cup (h_1^2 \cup \cdots \cup h_k^2) \cup h^3$$

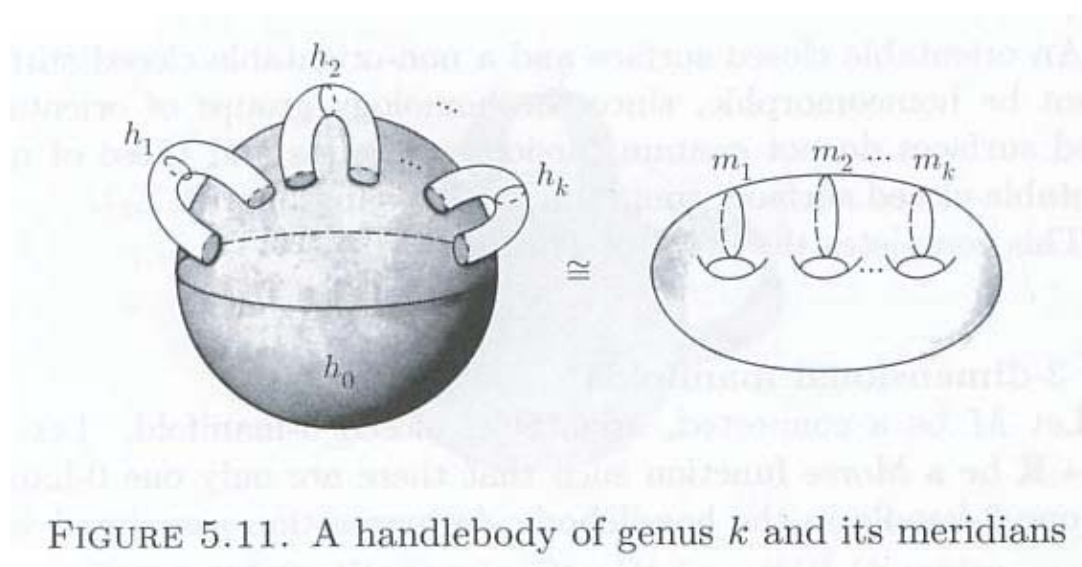


FIGURE 5.11. A handlebody of genus  $k$  and its meridians

$M$  の 2 つのハンドル体  $H_1 = h^0 \cup (h_1^1 \cup \cdots \cup h_k^1)$  と  $H_2 = (h_1^2 \cup \cdots \cup h_k^2) \cup h^3$  への分解をヒーガード分解といい、 $S = H_1 \cap H_2$  をヒーガード曲面という。

- Jesse Johnson, *Notes on Heegaard Splittings*, <http://www.math.ucdavis.edu/~jjohnson/notes.pdf>
- Yukio Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory*, AMS MMONO **208**.

はお薦めである。他には、

- Martin Scharlemann, *Heegaard splittings of compact 3-manifolds*, <http://front.math.ucdavis.edu/math.GT/0007144>
- Toshio Saito, Martin Scharlemann, Jennifer Schultens, *Lecture notes on generalized Heegaard splittings*, <http://front.math.ucdavis.edu/0504.5167>

などがある。

### 3.2.1 橋位置・細い位置

定理 3.2.8 ([5, Theorem 5.1]). *If a knot or link has  $n$  thin levels when put in thin position then its exterior contains a collection of  $n$  disjoint, non-parallel, planar, meridional, essential surfaces.*

### 3.2.2 ブレイド表示

### 3.2.3 結び目解消トンネル

定理 3.2.9 ([29]). *There is an algorithm to determine the tunnel number of a hyperbolic knot.*

### 3.2.4 ファイバー結び目

## 3.3 局所変形

### 3.3.1 交差交換

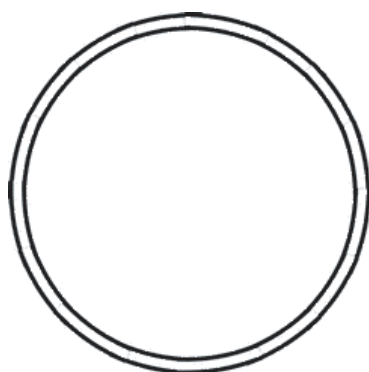
### 3.3.2 ツイスト

### 3.3.3 バンド和

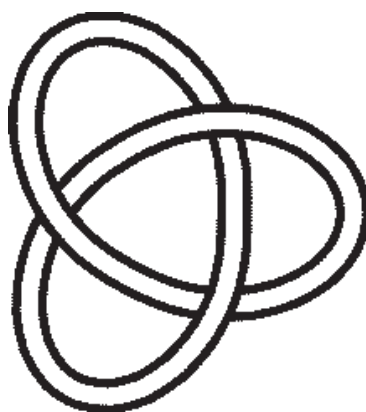
### 3.3.4 結び目解消操作

定理 3.3.1 ([1]). *Let  $(K, \Delta)$  be a twisting pair and  $n$  an integer. If  $|n| > 1$  then  $K_{\Delta, n}$  has the geometric type of  $(K, \Delta)$ .*

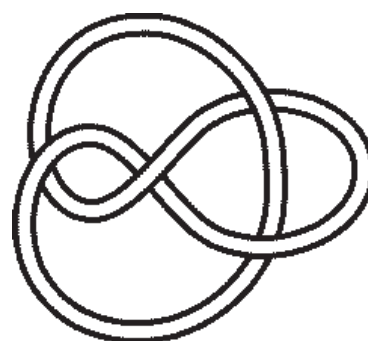
## 結び目の表



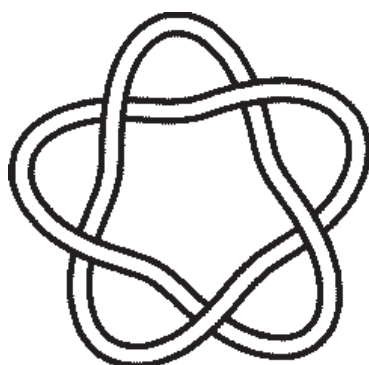
$0_1$



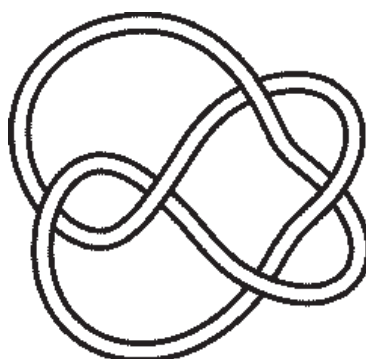
$3_1$



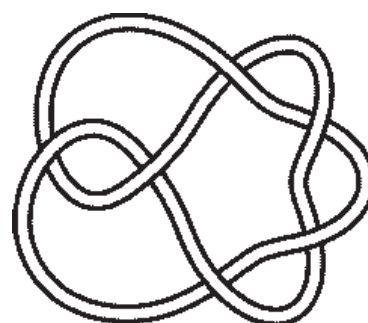
$4_1$



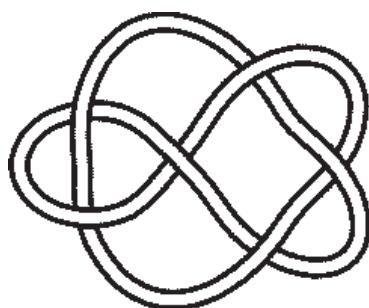
$5_1$



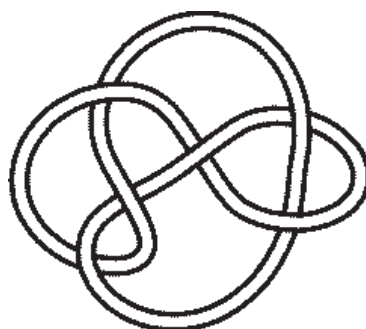
$5_2$



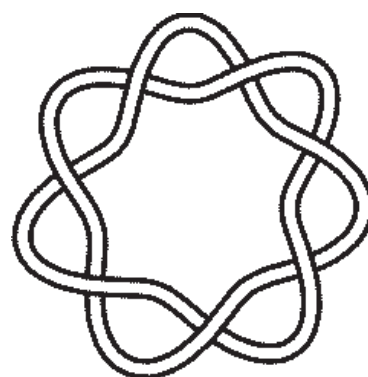
$6_1$



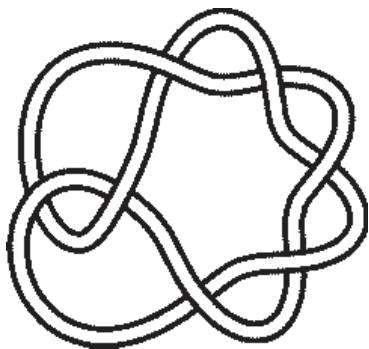
$6_2$



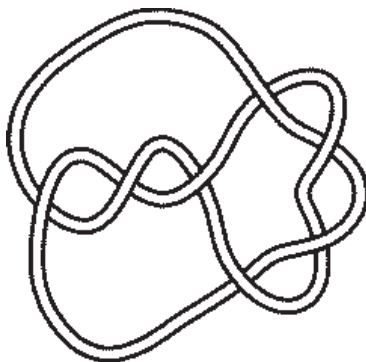
$6_3$



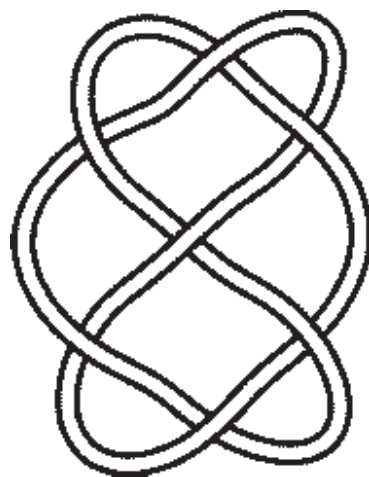
$7_1$



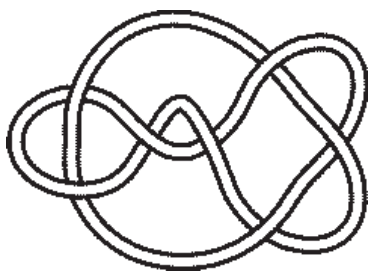
$7_2$



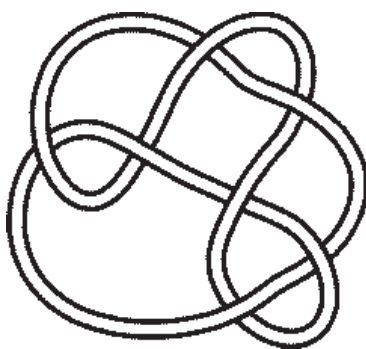
$7_3$



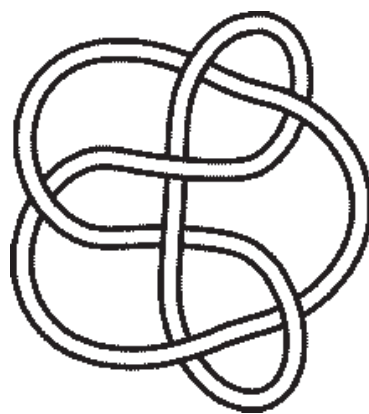
$7_4$



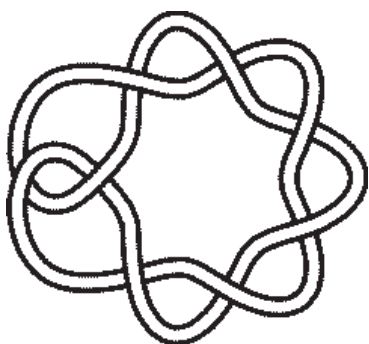
$7_5$



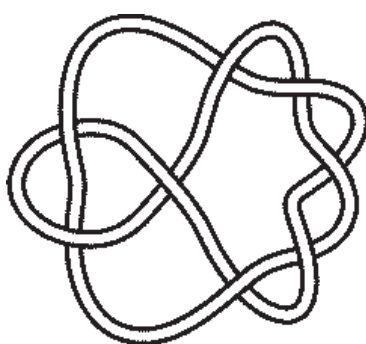
$7_6$



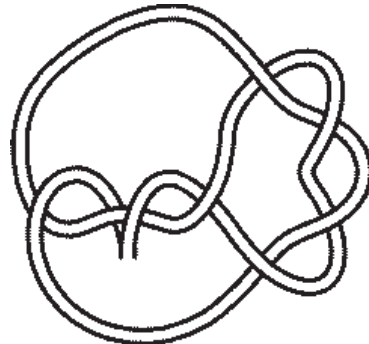
$7_7$



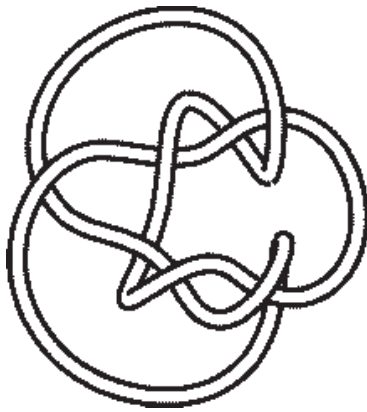
$8_1$



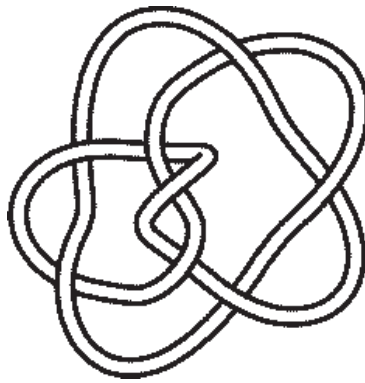
$8_2$



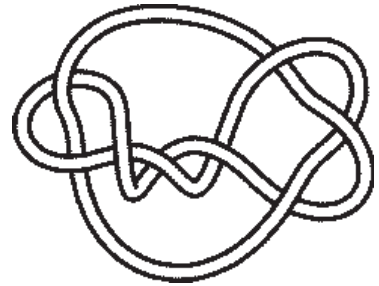
$8_3$



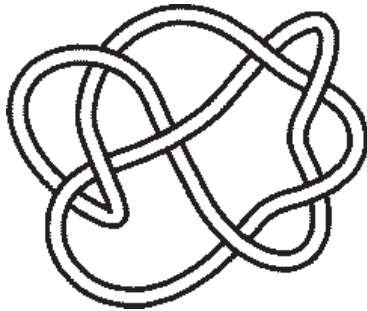
8<sub>4</sub>



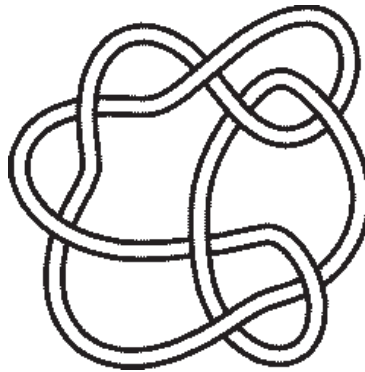
8<sub>5</sub>



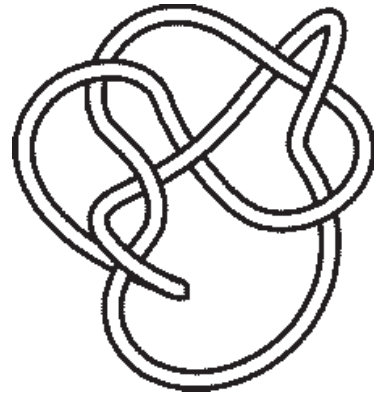
8<sub>6</sub>



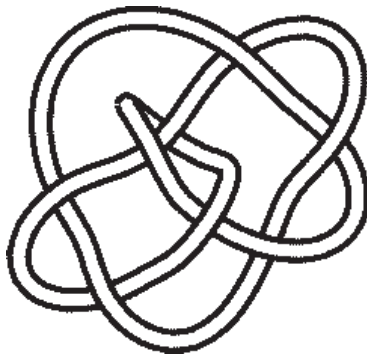
8<sub>7</sub>



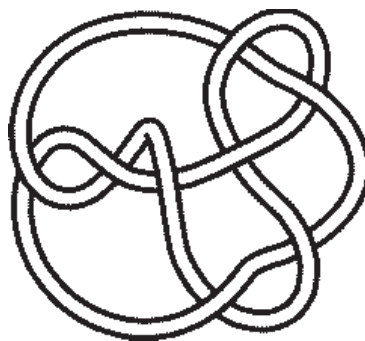
8<sub>8</sub>



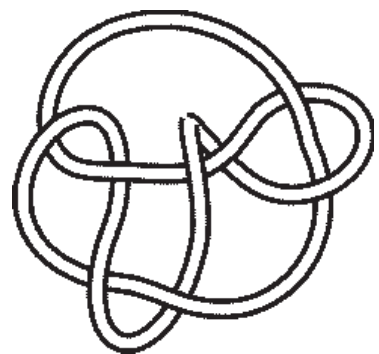
8<sub>9</sub>



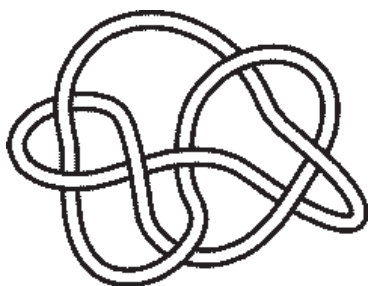
8<sub>10</sub>



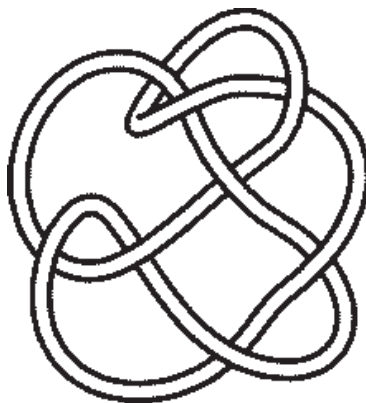
8<sub>11</sub>



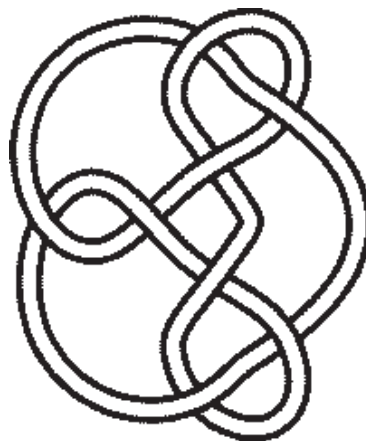
8<sub>12</sub>



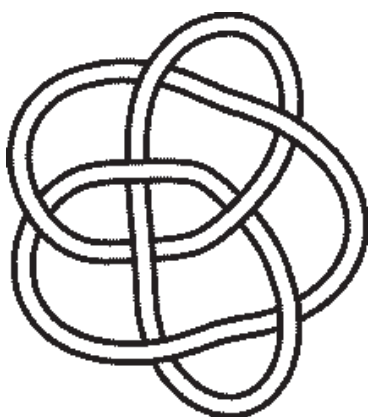
8<sub>13</sub>



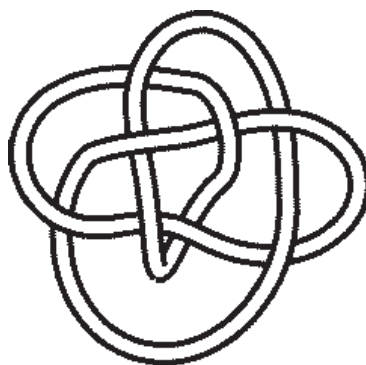
8<sub>14</sub>



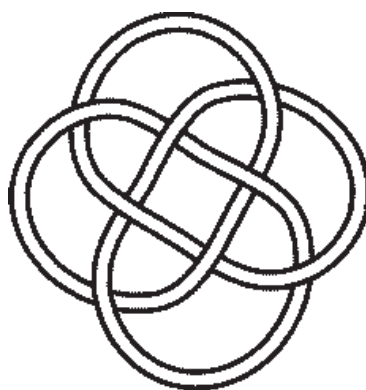
8<sub>15</sub>



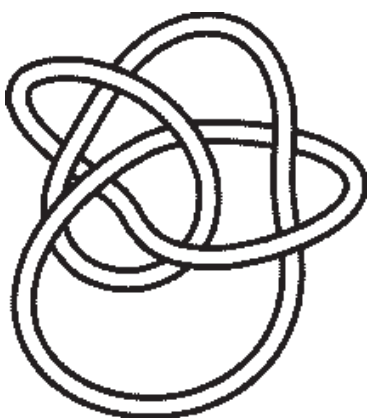
8<sub>16</sub>



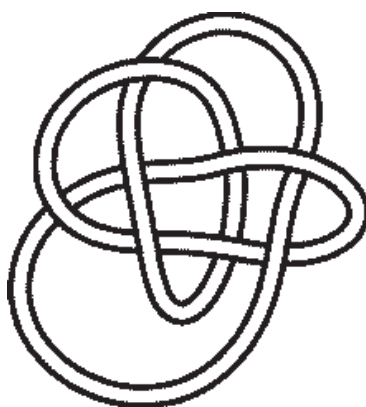
8<sub>17</sub>



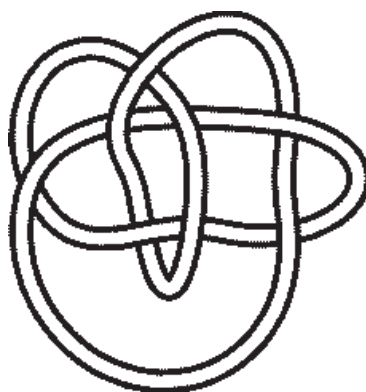
8<sub>18</sub>



8<sub>19</sub>



8<sub>20</sub>



8<sub>21</sub>

## 関連図書

- [1] M. Aït-Nouh, D. Matingnon and K. Motegi, *Geometric types of twisted knots*, Annales Mathématiques Blaise Pascal **13** (2006), 31–85.
- [2] J. W. Alexander, *On the subdivision of a 3-space by a polyhedron*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **10** (1924) 6-8.
- [3] R. J. Aumann, *Asphericity of alternating knots*, Ann. of Math. **64** (1956) 374–392.
- [4] D. Bachman, *A note on Kneser-Haken finiteness*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2003) 899-902.
- [5] D. Bachman, *Non-parallel essential surfaces in knot complements*, math.GT/0302272.
- [6] F. Bonahon and L. Siebenmann, *Geometric splittings of knots and Conway’s algebraic knots*, preprint, 1987.
- [7] G. Burde and K. Murasugi, *Links and Seifert fiber spaces*, Duke. Math. J. **37** (1970) 89-93.
- [8] R. Crowell, *Genus of alternating link types*, Ann. of Math. **69** (1959) 258-275.
- [9] P. R. Cromwell, *Homogeneous links*, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989) 535–552.
- [10] M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke and P. B. Shalen, *Dehn surgery on knots*, Ann. of Math. **125** (1987) 237-300.
- [11] L. Goeritz, *Bemerkungen zur knotentheorie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **10** (1934) 201–210.
- [12] P. Frankl and L. Pontrjagin, *Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie*, Math. Ann. **102** (1930) 785–789.
- [13] D. Gabai, *The Murasugi sum is a natural geometric operation*, Contemp. Math. **20** (1983) 131–143.
- [14] D. Gabai, *Foliations and genera of links*, Topology **23** (1984) 381–394.
- [15] D. Gabai, *Genus is superadditive under band connected sum*, Topology **26** (1987) 209–210.
- [16] C. McA. Gordon, *On primitive sets of loops in the boundary of a handlebody*, Topology Appl. **27** (1987), 285-299.
- [17] C. McA. Gordon and J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989) 371-415.
- [18] C. McA. Gordon and A. W. Reid, *Tangle decompositions of tunnel number one knots and links*, J. Knot Theory and its Ramification **4** (1995) 389-409.
- [19] W. Haken, *Ein Verfahren zur Aufspaltung einer 3-Mannigfaltigkeit in irreduzible 3-Mannigfaltigkeiten*, Math. Zeit., **76** (1961) 427-467.

- [20] A. Hatcher, *On the boundary curves of incompressible surfaces*, Pacific J. Math. **99** (1982) 373-377.
- [21] J. Hoste, M. Thistlethwaite and J. Weeks, *The First 1701936 Knots*, Math. Intell. **20** (1998) 33-48.
- [22] K. Ichihara and M. Ozawa, *Accidental surfaces in knot complements*, J. Knot Theory and its Ramifications **9** (2000), 725-733.
- [23] W. Jaco, *Adding a 2-handle to 3-manifolds: An application to property R*, Proc. Amer. Math. Soc., **92** (1984), 288-292.
- [24] W. Jaco and P. B. Shalen, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Memoirs Amer. Math. Soc., **21** (1979).
- [25] K. Johannson, *Homotopy equivalence of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Math., **761**, Springer Verlag (1986).
- [26] L. H. Kauffman, *State Models and the Jones Polynomial*, Topology **26** (1987) 395-407.
- [27] S. Kinoshita and H. Terasaka, *On Unions of Knots*, Osaka Math. J. **9** (1959) 131-153.
- [28] H. Kneser, *Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung. **38**, (1929) 248-260.
- [29] M. Lackenby, *An algorithm to determine the tunnel number of hyperbolic knots*, preprint available in <http://xxx.lanl.gov/abs/0709.0376>.
- [30] W. B. R. Lickorish, *The irreducibility of the 3-sphere*, Michigan Math. J. **36** (1989) 345-349.
- [31] W. B. R. Lickorish and M. B. Thistlethwaite, *Some links with non-trivial polynomials and their crossing numbers*, Comment. Math. Helvetici **63** (1988) 527-539.
- [32] B. Mangum and T. Stanford, *Brunnian links are determined by their complements*, Algebraic & Geometric Topology **1** (2001) 143-152.
- [33] W. Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, Topology, Vol. 23, No.1 (1984), 37-44.
- [34] W. Menasco and M. Thistlethwaite, *The Tait Flying Conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. **25** (1991) 403-412.
- [35] W. Menasco and M. Thistlethwaite, *The classification of alternating links*, Ann. Math. **138** (1993) 113-171.
- [36] J. Milnor, *A Unique Decomposition Theorem for 3-Manifolds*, Amer. J. of Math., **84** (1962) 1-7.
- [37] J. M. Montesinos, *Minimal plat representations of prime knots and links are not unique*, Can. J. Math. Vol. XXVIII, No. 1 (1976), 161-167.
- [38] G. D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Ann. Math. Studies **78**, Princeton Univ. Press (1973)
- [39] K. Murasugi, *On the genus of the alternating knot I, II*, J. Math. Soc. Japan **10** (1958) 94-105, 235-248.

- [40] K. Murasugi, *The Jones Polynomial and Classical Conjectures in Knot Theory*, Topology **26** (1987) 187-194.
- [41] L. Neuwirth, *Interpolating manifolds for knots in  $S^3$* , Topology **2** (1964) 359-365.
- [42] M. Ochiai, *Non-trivial projections of the trivial knot*, Asterisque **192** (1990) 7-10.
- [43] 落合豊行, 山田修司, 豊田英美子, コンピュータによる結び目理論入門, 牧野書店, 数理情報科学シリーズ **14** 1996.
- [44] U. Oertel, *Closed incompressible surfaces in complements of star links*, Pacific J. of Math., **111** (1984) 209-230.
- [45] M. Ozawa and H. Matsuda, *Free genus one knots do not admit essential tangle decompositions*, J. Knot Theory Ramifications **7** (1998) 945-953.
- [46] M. Ozawa, *Closed incompressible surfaces in the complements of positive knots*, Comment. Math. Helv. **77** (2002) 235-243.
- [47] M. Ozawa and Y. Tsutsumi, *Minimally knotted spatial graphs are totally knotted*, Tokyo J. Math. **26** (2003) 413-421.
- [48] M. Ozawa, *Non-triviality of generalized alternating knots*, J. Knot Theory and its Ramifications **15** (2006) 351-360.
- [49] M. Ozawa, *A property of diagrams of the trivial knot*, preprint available in <http://arxiv.org/abs/math.GT/0606293>.
- [50] M. Ozawa, *Essential state surfaces for knots and links*, preprint available in <http://arxiv.org/abs/math.GT/0609166>.
- [51] M. Ozawa, *Closed incompressible surfaces of genus two in 3-bridge knot complements*, preprint available in <http://arxiv.org/abs/math.GT/0702867>
- [52] D. Ruberman, *Mutation and volumes of knots in  $S^3$* , Invent. Math. **90** (1987) 189-215.
- [53] M. Scharlemann and M. Tomova, *Uniqueness of bridge surfaces for 2-bridge knots*, math.GT/0609567.
- [54] H. Seifert, *Über das Geschlecht von Knoten*, Math. Ann. **110** (1934) 571- 592.
- [55] M. Scharlemann, *Sutured manifolds and generalized Thurston norms*, J. Diff. Geom. **29** (1987), 557-614.
- [56] M. Scharlemann and A. Thompson, *Link genus and the Conway moves*, Comment. Math. Helvetici **64** (1989) 527-535.
- [57] M. Scharlemann and A. Thompson, *Detecting unknotted graphs in 3-space*, J. Diff. Geom. **34** (1991) 539-560.
- [58] H. Schubert, *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knoten in Primknoten*, Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. KI. **3** (1949) Abh: 57-104.

- [59] M. B. Thistlethwaite, *A Spanning Tree Expansion of the Jones Polynomial*, Topology **26** (1987) 297-309.
- [60] M. B. Thistlethwaite, *On the algebraic part of an alternating link*, Pacific J. Math. **151** (1991) 317-333.
- [61] W. P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, available in <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>.
- [62] W. P. Thurston, *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982) 357-381.
- [63] W. P. サーストン著, S. レヴィ編, 小島定吉監訳, *3次元幾何学とトポロジー*, 培風館, 1999.
- [64] W. Whitten, *Knot complements and groups*, Topology **26** (1987) 41-44.