CLOSED INCOMPRESSIBLE SURFACES IN THE COMPLEMENTS OF POSITIVE KNOTS

小沢 誠（早稲田大学教育学部理学科数学専修）
bttb@i.am *http://i.am/bttb/*

1. Introduction

K を S^3 内の knot、F を K の Seifert surface とする。F が *free* であるとは、$\pi_1(S^3 - F)$ が free group のときをいう。これは、$\mathrm{cl}(S^3 - N(F))$ が handlebody であることと同値である。F が free でないとき、*non-free* という。

Seifert surface に compressible であることを許せば、任意の knot は free Seifert surface と non-free Seifert surface を張る。従って、以後 incompressible Seifert surface のみを扱う。

Hatcher と Thurston は 2-bridge knot complement 内の incompressible surface を分類した ([4])。この結果により、2-bridge knot に関しては任意の incompressible Seifert surface が free であることが得られる。ところが、free incompressible Seifert surface、non-free incompressible Seifert surface 共に張る knot が存在する ([14], [9])。更に、non-free incompressible Seifert surface のみしか張らない knot が存在することが知られている ([8], [6])。

Giffen と Siebenmann は次の問題を提起した。

Problem 1.1. ([5, Problem 1.20 (B)]) *Which knots bound an incompressible free Seifert surface?*

この問題に関して、以下に述べる slim knot と呼ばれるクラスでは、全ての incompressible Seifert surface が free であることが分かる。

S を $S^3 - K$ 内の closed incompressible surface とする。S が *meridionally compressible* であるとは、S の S^3 内での compressing disk D で K と 1 点で交わるものが存在するときをいう。K が *slim* であるとは、$S^3 - K$ 内の全ての closed incompressible surface が meridionally compressible であるときをいう。

Theorem 1.2. *Montesinos knot* ([13])、*alternating knot* ([10])、*almost alternating knot* ([2])、*toroidally alternating knot* ([1])、*closed* 3*-braid knot* ([7]) は *slim* である。

free という概念は、全ての surface に拡張することが出来る。F を $E(K)$ 内に proper に埋め込まれた surface とする。F が *free* であるとは、$\mathrm{cl}(E(K) - N(F))$ の各成分が handlebody であるときをいう。

Proposition 1.3. *Let K be a slim knot and F an essential surface properly embedded in $E(K)$. Then one of the following conclusions holds.*

1. *F is free.*
2. *∂F is meridional.*

従って、次の corollary が得られる。

Corollary 1.4. *Any incompressible Seifert surfaces for a slim knot is free.*

K の全ての free Seifert surface の中で最小の genus を *free genus* といい、$g_f(K)$ で表す。一般に $g_f(K) \geq g(K)$ であるが、上で述べたように、non-free incompressible Seifert surface のみしか張らない knot が存在するので、一般に等号は成立しない。

Corollary 1.5. *For any slim knot K, $g(K) = g_f(K)$.*

[11] や [6] などでは等号が成立しない例が挙げられているが、それらの knot は winding number が 0 の satellite knot という共通点を持っている。そこで、knot complement 内の closed incompressible surface と knot との絡み具合が関係していると推測して、次の定義を考えた。

S を $S^3 - K$ 内の closed surface とする。$i : S \to S^3 - K$ を inclusion map とし、$i_* : H_1(S) \to H_1(S^3 - K)$ をその induced homomorphism とする。$Im(i_*)$ は $H_1(S^3 - K) = \mathbb{Z}\langle\text{meridian}\rangle$ の subgroup であるから、integer m が存在して $Im(i_*) = m\mathbb{Z}$ を満たす。このとき、S の *order* $o(S; K)$ を m で定義する ([13])。

Theorem 1.6. ([13]) *The following conditions are equivalent.*

1. *There exists an incompressible non-free Seifert surface F for K.*
2. *There exists a closed incompressible surface S in $S^3 - K$ with $o(S; K) = 0$.*

この結果から、$S^3 - K$ 内の全ての closed incompressible surface の order が 0 でなければ、K の任意の incompressible Seifert surface は free であることが分かる。しかしながら、$S^3 - K$ 内の closed incompressible surface の order が具体的に分かっている knot のクラスとしては、前述の slim knot のみしか知られておらず、それらの knot が non-free incompressible Seifert surface を張り得ないことは、Proposition 1.3 を使えば容易に得られる。そこで、Theorem 1.6 を有効に利用出来る knot のクラスを探すことにした。

2. Results

K が *positive* であるとは、全ての crossing が positive であるような diagram を持つものをいう。positive knot は diagram を描いてみれば分かるが、自分自身と positive に絡んでいるような knot である。このような knot ならば、補空間内にある closed incompressible surface とも positive に絡んでくるのではないかと推測し、次の結果を得た。

Theorem 2.1. *Let K be a positive knot and S a closed incompressible surface in $S^3 - K$. Then $o(S; K) \neq 0$.*

従って、Problem 1.1 に関する部分的回答として次が得られる。

Corollary 2.2. *Positive knots cannot bound non-free incompressible Seifert surfaces.*

連結な positive diagram を持つ positive link は、positive linking number を持つので non-split であるが、幾何的な別証明を与えることが出来た。

Theorem 2.3. *Positive links are non-split if they have a connected positive diagram.*

positive link の positive diagram は primeness に関しても情報を提供している。2-sphere S 上の positive link diagram $\tilde{K}$ が *prime* であるとは、$\tilde{K}$ と 2 点で交わる S 上の任意の loop l が $\tilde{K}$ と arc で交わる disk を S 上で張るときをいう。

Theorem 2.4. *Non-trivial positive knots or links are prime if they have a connected, prime, positive diagram.*

Theorem 2.4 は Cromwell の結果 [3, 1.2 Theorem] を拡張している。

Theorem 2.1 と 2.3 は次の Theorem から従う。

Theorem 3.1. *Let K be a positive knot or link in the 3-sphere S^3 and F a closed incompressible surface in the complement of K. Then one of the following conclusions holds.*

1. *There exists a loop l in F such that $lk(l, K) \neq 0$.*
2. *F is a splitting sphere for K, and any positive diagram of K is disconnected.*

Proof. S^2 を S^3 内の 2-sphere、$p : S^3 - \{2\ points\} \cong S^2 \times R \to S^2$ を projection とする。K を $p(K)$ が positive diagram になるように置く。$p(K)$ を保ちつつ、K を bridge presentation する。bridge presentation から、次の情報が得られる。

- $S^3 = B^+ \cup_{S^2} B^-$
  (S^2 decomposes S^3 into two 3-balls)
- $K = K^+ \cup_{S^2} K^-$, where $K^\pm \subset B^\pm$
  (S^2 cuts K into over bridges and under bridges)
- $K^\pm = K_1^\pm \cup K_2^\pm \cup \dots K_n^\pm$
  (K is presented as n over bridges and n under bridges)
- $D^\pm = D_1^\pm \cup D_2^\pm \cup \dots D_n^\pm$
  (each $K_i^\pm \cup p(K_i^\pm)$ bounds a disk $D_i^\pm$ such that $p(D_i^\pm) = p(K_i^\pm)$)

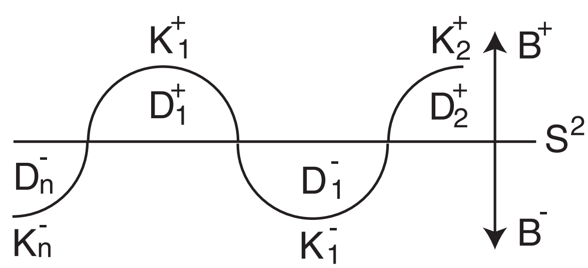

FIGURE 1. View from level surface

S を切り貼りすることで、次の lemma が得られる。

Lemma 3.2. *We may assume that*

1. $S \cap D^- = \emptyset$
2. $S \cap B^-$ *consists of disks*
3. $S \cap D^+$ *consists of arcs*
4. *any component of $S \cap B^+ - D^+$ is a disk*

$|S \cap B^-|$ と $|S \cap D^+|$ をこの順序で最小にとる。S が $S^3 - K$ 内で incompressible であることから、$|S \cap B^-| \neq 0$ が分かる。もし、$|S \cap B^-| = 1$ かつ $|S \cap D^+| = 0$ ならば、結論の 2 を得る。

以後、$|S \cap B^-| \geq 1$ かつ $|S \cap D^+| \geq 1$ であると仮定する。

このとき、$S \cap B^-$ を頂点、$S \cap D^+$ を辺とみなすことにより、S 内に connected graph G を得る。α と $p(\alpha)$ には K から自然に導かれる向きを指定しておく (Figure 2)。

$|S \cap B^-|$ と $|S \cap D^+|$ の最小性より、次の lemma が得られる。

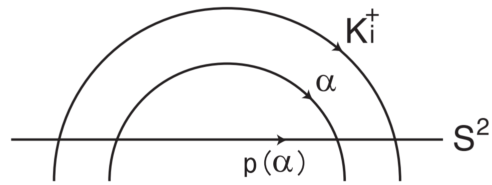

FIGURE 2. α and $p(\alpha)$ have the orientaions

Lemma 3.3. *For any edge α of $S \cap D^+$, $p(\alpha) \cap p(K^-) \neq \emptyset$.*

次の lemma は $\tilde{K}$ の positive 性から従う。

Lemma 3.4. *For any face f, the cycle ∂f can not be oriented.*

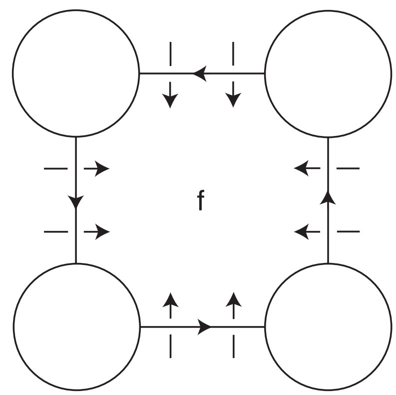

FIGURE 3. $p(\partial f)$ has non-zero intersection number

G の各 face f と ∂f 上の各 edge に対して、次の性質を持つ f 上の arc γ を見付けることが出来る。

(*) γ は ∂f 上異なる向きを持つ二つの edge を繋ぐ。

S 上の loop l で $lk(l, K) \neq 0$ のものを探す為、G の任意の edge から出発し、性質 (*) を満たす arc を辿って行く。G の有限性から、いつか一度通った face に戻ってくる。これらの arc を繋いで、$S \cap B^+$ 上の loop l で、S 上 G との intersection number が non-zero のものが得られる。よって、K と non-zero linking number を持つ S 上の loop が得られる。splitting sphere 上の任意の loop は $S^3 - K$ 内 contractible なので、結論の 1 を得る。 □

次に、Theorem 2.4 の証明の概略を述べる。

Proof. S を positive knot 又は link K の decomposing sphere とする。K と S を Theorem 3.1 の証明と同様に置く。但し、$S \cap K$ の 2 点 p_1 と p_2 は $intB^+$ 又は $intB^-$ にあるようにする。tangle $(B^{\pm}, K^{\pm})$ が trivial で、S は decomposing sphere

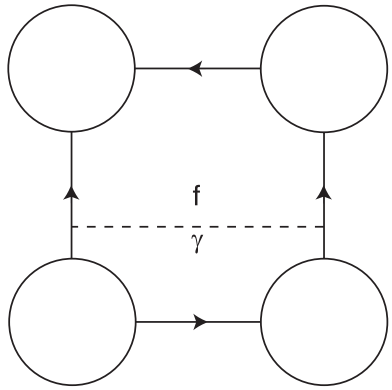

FIGURE 4. γ with the property (*)

であることから、p_1 と p_2 は $S \cap D^{\pm}$ の単一の arc の端点ではないことに注意する。故に、p_1 と p_2 をそれぞれ含む $S \cap D^{\pm}$ の arc e_1 と e_2 が存在する。

Lemma 3.2 と同様に次が得られる。

Lemma 3.5. *We may assume that*

1. $S \cap D^- \subset e_1 \cup e_2$
2. $S \cap B^-$ *consists of disks*
3. $S \cap D^+$ *consists of arcs*
4. *any component of* $S \cap B^+ - D^+$ *is a disk*

$|S \cap B^-|$ と $|(S \cap D^+) - (e_1 \cup e_2)|$ をこの順序で最小にとる。このとき、$S \cap B^-$ と $(S \cap D^+) - (e_1 \cup e_2)$ をそれぞれ頂点と辺とみなすことにより、S 上に connected graph G を得る。

$(B^{\pm}, K^{\pm})$ が trivial tangle で、S が decomposing sphere であることから、$|S \cap B^-| \neq 0$ に注意する。

もし、$|S \cap B^-| = 1$ かつ $S \cap D^+ \subset e_1 \cup e_2$ ならば、$p(e_i) = p(p_i)$ $(i = 1, 2)$ より、$S \cap S^2$ が望まれる loop を与える。

Lemma 3.6. *For any arc* α *of* $(S \cap D^+) - (e_1 \cup e_2)$, $p(\alpha) \cap p(K^-) \neq \emptyset$.

以後、$\tilde{K}$ が prime であると仮定する。

Lemma 3.7. *There is no vertex of* G *with valency 1.*

Lemma 3.8. *There is no face* f *of* G *in* S *such that* ∂f *is a loop of* G.

故に、G は少なくとも二つの頂点を持ち、全ての頂点の valency は少なくとも 2 以上で、G の全ての face は disk である。

Lemma 3.9. *For any face* f, *the cycle* ∂F *can not be oriented.*

closure が disk であるような S 上 G の face f から出発し、$|lk(l, K)| \geq 2$ となる $S - K$ 上の loop l を得る。ところが、$S - K$ 上の任意の loop は $S^3 - K$ 内 null-homotopic 又は $|lk(l, K)| = 1$ であるから、これは不可能である。よって、Theorem 2.4 が示された。 $\square$

References

[1] C. Adams, *Toroidally alternating knots and links*, Topology **33**, (1994), 353-369.

[2] C. Adams, J. Brock, J. Bugbee, T. Comar, K. Faigin, A. Huston, A. Joseph and D. Pesikoff, *Almost alternating links*, Topology and its Appl. **46**, (1992), 151-165.

[3] P. R. Cromwell, *Positive braids are visually prime*, Proc. London Math. Soc. (3) **67** (1993) 384-424.

[4] A. Hatcher and W. Thurston, *Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements*, Invent. Math. **79**, (1985), 225-246. MR **86g**: 57003

[5] R. Kirby, *problemlems in low-dimensional topology*, Part **2** of Geometric Topology (ed. W. H. Kazez), Studies in Adv. Math., Amer. Math. Soc. Inter. Press, 1997.

[6] M. Kobayashi and T. Kobayashi, *On canonical genus and free genus of knot*, J. Knot Theory and Its Ramifi. **5**, (1996), 77-85. MR **97d**: 57008

[7] M. T. Lozano and J. H. Przytycki, *Incompressible surface in the exterior of a closed 3-braid*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **98**, (1985), 275-299.

[8] H. C. Lyon, *Knots without unknotted incompressible spanning surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **35**, (1972), 617-620. MR: 46 ♯2663

[9] H. C. Lyon, *Simple knots without unique minimal surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **43**, (1974), 449-454. MR: 51 ♯14019

[10] W. Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, Topology **23** (1984) 37-44.

[11] Y. Moriah, *On the free genus of knots*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987) 373-379.

[12] U. Oertel, *Closed incompressible surfaces in complemants of star links*, Pacific J. of Math., **111**, (1984), 209-230.

[13] M. Ozawa, *Synchronism of an incompressible non-free Seifert surface for a knot and an algebraically split closed surface in the knot complement*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[14] C. B. Schaufele, *The commutator group of a doubled knot*, Duke Math. J. **34**, (1967), 677-681. MR: 35 ♯7328

Makoto Ozawa, Department of Science, School of Education, Waseda University, 1-6-1 Nishiwaseda, Shinjuku-ku, Tokyo 169-8050, Japan

E-mail address: `ozawa@mn.waseda.ac.jp`