

小学校算数の醍醐味

第1回 消去算と連立方程式 —大人の解き方、子供の解き方—

石川純治

ある中学入試問題から一考える力

ある中学入試に次のような問題が出ていた。大人なら簡単に解けそうな問題だが、小学生はどう解くか。

【問題】 姉と妹で 7400 円の商品を買いました。姉は所持金の $\frac{4}{7}$ を、妹は所持金の $\frac{2}{3}$ を出し合いました。残りの金額を比べたところ、姉の方が妹よりも 800 円多く残っていました。2 人のはじめの所持金はそれぞれいくらですか。

大人の解き方と小学生の解き方を比較してみると、ある興味深いことが見えてくる。大人の機械的で味気ない解き方に比べて、小学生の解き方はなんとも独特の面白い工夫がある。そこには、考える力が試されている。単に答えを出すだけが能ではないのである。

大人の解き方 (連立方程式) —誰でも解ける機械的方法

まず大人 (中学生以上) はこれをどう解くか。連立方程式を用いて、きわめて簡単に解くだろう。すなわち、求めたい姉と妹の所持金をそれぞれ x 、 y とすると、

$$(a) \begin{cases} \frac{4}{7}x + \frac{2}{3}y = 7400 & \dots(1) \\ \frac{3}{7}x - \frac{1}{3}y = 800 & \dots(2) \end{cases}$$

となり、(1)式+(2)式 $\times 2$ より、 $\frac{10}{7}x = 9000 \quad \therefore x = 6300$ 、これより $y = 5700$ となる。実に簡単である。

小学生の解き方 (消去算) —独特の工夫と考え方

さて、連立方程式を知らない (大人が教えて知っている子供もいるが) 小学6年生はどう解くか。

まず、大人のように求める金額 (未知数) を変数 x 、 y とはしない (できない)。では、どうするか。ここが面白いところである。すなわち、姉の出した金額を④ (ここで⑦が求める姉の所持金であることを想定していることに注意)、つまり x に該当することに注意)、妹を②とすると (同じく③が求める妹の所持金、つまり y に該当することに注意)、次の式ができる。

$$(b) \begin{cases} \textcircled{4} + \textcircled{2} = 7400 & \dots(1) \\ \textcircled{3} - \textcircled{1} = 800 & \dots(2) \end{cases}$$

(1)式+(2)式 $\times 2$ より、 $\textcircled{10} = 9000 \quad \therefore \textcircled{1} = 900$ 、これより姉の所持金は $\textcircled{7} = 900 \times 7 = 6300$ 、また(2)式より、 $\textcircled{1} = 2700 - 800 = 1900$ であり、これより妹の所持金は $\textcircled{3} = 1900 \times 3 = 5700$ となる。

小学校算数の醍醐味—大人と何が違うか

さて、もうお気づきかと思うが、連立方程式を用いて解くのとどこがどう違うか。それは、(a)と(b)を比較すればわかる。すなわち、次のとおりである。

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \qquad \text{(b)} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{大人の } x = \text{子供の } \textcircled{7} \\ \text{大人の } y = \text{子供の } \boxed{3} \end{array} \right. \end{array}$$

つまり、姉の場合、所持金の4/7の分母(全体)⑦を求める金額(大人から見れば、暗黙の未知数 x)と考え、そのうち④を出したと考える(従って残額は③)。妹と区別するため、丸付き数字にしているだけである。

さらに、(a)と(b)をよく見比べると、(b)は形式的には(a)の分母が消えて分子だけの式になっている。ここが面白いところである。大人のように x 、 y とおかなくても、結果的には、計算過程を見れば、大人と同じ解き方になっていることがわかる。

しかし、どちらに考える力が試されるかと問えば、その答えは自ずと明らかである。大人の方法(a)は、未知数を x 、 y とおいて、あとは条件式を連立方程式に持ち込みむだけである(あとは機械が計算してくれる)。それに比べ、子供の方法(b)の設定(⑦と③)はまことに見事な工夫である。 x 、 y の設定は不要なのである。小学校算数の面白さ、醍醐味がここにある。

小学校算数から学ぶもの—「考える算数」

こうして、小学生の独特の解き方を、味気のない大人の解き方を通して見ると、その中にある種独特の工夫が見えてくる。その解き方(b)に見える思考の工夫や面白さは(意味論的な理解と解法)、大人の機械的(構文論的)な解き方(a)ではもはや消えているといえる。逆に、(b)の中にあるものから見れば、(a)の大人の解き方の中には、確かに便利なのだが、それと引き替えに機械論的な方法が見えてくるのである。

(b)の子供の解き方 → (a)の大人の解き方 → (b)の解き方の中にあるもの

小学校算数から中等学校数学への道が、(b)の子供の解き方から(a)の誰でも解ける方法へとなると、その教育過程の意味はいったい何だろうかと考えてしまう。小学校時代の算数が一番「考える算数」だったと言えるのではないだろうか。

よく聞く話だが、天才的にうまい子供の絵が、大人の教育過程を経るにつれてごく平凡な絵になってしまう。消去算から連立方程式へは、そのことに通じているように思えてくる。

(2013年1月、とある日に)

※あとがき

つるかめ算にも共通する点がある(「つるかめ算と連立方程式」)。苦手意識の高い「差集め算」や「過不足算」、「相当算」の解法についてはどうか。特に大人の解法と比較して、いずれにも共通する思考(未知数をどううまく料理しているか)を抽出すると面白いだろう。

さらに、「 \times 算」といったパターン問題とは性格の異なる推理や条件整理の問題など取り上げて(そこでは未知数設定による構文的解法は通用しない)、大人の解法ではすでに消え去ってしまった小学校算数の醍醐味を味わってみたいものである。次回は「代数と幾何の交渉」といったテーマを取り上げてみたい。