長期依存性 / 自己相似性を持つトラヒックのモデル*

Toshihisa OZAWA
Department of Business Administration, Komazawa University
1-23-1 Komazawa, Setagaya-ku, Tokyo 154-8525, Japan
E-mail: toshi@komazawa-u.ac.jp

1999.10.30

1 はじめに

この解説の目的は，LAN や WAN などで観測されたトラヒックの特徴であるとされている長期依存性と自己相似性の定義を示すことと，そのような性質を持ったトラヒックのモデルを紹介することにある．ここでトラヒックモデルとは，待ち行列への入力過程を主に想定した確率過程モデルを指す [12]．

以下，2 では LAN で観測されたトラヒックがどのような特徴を示し，それが性能評価上どのような影響を与えているのかについて紹介する．3 では長期依存性と自己相似性の定義を与える．4 では長期依存性または自己相似性を持つ幾つかのトラヒックモデルを紹介する．これらのモデルは，従来から用いられてきたトラヒックモデルに非整数階の積分操作や重ね合わせの極限操作等を行うことによって構成される．

2 LAN トラヒックの特徴から

自己相似性 (またはフラクタル性) とは，“対象の持つ特徴が長さや時間などのスケール変換に対して不変である性質” と捉えることができる．確率過程の自己相似性については 1960 年代，Mandelbrot らによって研究されている．近年，それが再び通信の分野において検討される契機を与えたのは Willinger らによる LAN トラヒックの分析結果であった [18] ．そこで取り上げられた現象の例を図 1 に示す．この図は Bellcore で測定されたパケット数の時系列データを， 0.01 秒から 10 秒までの異なる時間単位で集計したものである．従来扱われてきた確率過程，例えばポアソン過程では，データの集計単位を大きくしていくと変動は急激に平滑化されていく．これに対し，LAN トラヒックデータでは，集計単位のオーダが 4 桁異なってもほぼ同様の激しい変動傾向を示している．このことより，時間スケールの変換に対する変動傾向の不変性 (自己相似性) を持ったトラヒックモデルの必要性が窺える．

変動傾向が集計時間単位のオーダによってどのように減少していくかは，次のような分散の分析によっても把握できる．今，時間を離散で考え，$\{X(n)\}$ を時刻 n における到着パケット数とし，それを m 時点分まとめた過程を $X^{(m)}(n) = m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1} X(mn+k)$ で定義する．マルコフ型の確率過程では，この $X^{(m)}(n)$ の分散は十分大きな m に対して m^{-1} のオーダーで減少することが知られている．それに対し，上記の LAN トラヒックでは十分大きな m に対して以下のように減少している ($c_0 > 0$ はある定数)．

$$\mathrm{Var}(X^{(m)}(n)) \sim c_0 m^{-2(1-H)} \tag{1}$$

*This is a draft version of a paper that appeared in システム / 制御 / 情報 (システム制御情報学会誌) , 43, 3, pp. 117-122 (1999).

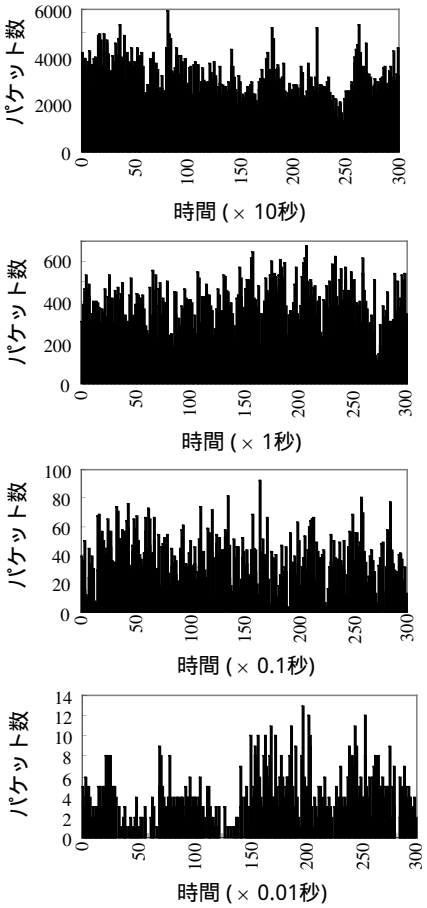

図 1: 異なる時間スケールで見たパケットの到着過程

ここで，H は Hurst パラメータ[1]と呼ばれ，このような確率過程を特徴付ける重要な量となっている．上記の LAN トラヒックでは，$H > 0.6$，特に負荷の高い場合は $H > 0.8$ という結果を得ており，変動の平滑化が非常に緩やかであることが分かる．この性質は後で述べる自己相関関数の減少がべき乗関数的であるという性質に関連してくる．

ところで，このようなトラヒックが待ち行列 (バッファサイズは無限) に加わると，性能特性も大きく異なってくることが分かっている．例えば，自己相似性を持つ確率過程である fractional ブラウン運動を用いて入力トラヒックモデルを構成した流体モデルでは，待ち行列長 Q の分布の裾が次のような漸近特性を示す [3, 9]．

$$\Pr(Q > x) \sim e^{-c_1 x^{2(1-H)}} \text{ as } x \to \infty \tag{2}$$

ここで，$c_1 > 0$ はモデルパラメータから決まる定数であり，H は fractional ブラウン運動の Hurst パラメータである．式 (2) において，通常，H は $1/2 < H < 1$ の範囲にある．よって，十分大きな待ち行列長に対してその分布の裾は Weibull 型となり，非常にゆっくり減少することが分かる．これに対し，マルコフ型のトラヒックモデルを入力とした場合には，同様な量が指数関数的に減少することが知られている．待ち行列長分布の裾は，許容待ち時間を越える割合やパケットの溢れ率等の評価に用いられており，両者の違いはそれら評価結果に大きく影響してくる[2]．

[1] H. E. Hurst はナイル川の流量の解析から長期依存性という性質を導き出した．
[2] 関連する話題については []Ozaw98 を参照．

3　数学的定義と関連する性質

3.1　若干の準備

待ち行列への入力過程を想定していることから，対象とする確率過程として点過程 (stochastic point process) $\{N(t)\}$ と増分過程 (stochastic additive process) $\{R(t)\}$ を考える．それらの見本路は右連続で左極限を持つものとする．増分過程については流体モデルを想定し，見本路が連続な場合も含める．$N(t)$ の例としては時間区間 $(0,t]$ に到着したパケット数，$R(t)$ の例としては同区間に到着したデータ量が考えられる．以下では，記号 N, R をこれらふたつの確率過程を表わすのに用い，Y をそれらの代表として用いる．また，ふたつの確率変数が分布の意味で等しいことを $=_d$ で表わし，ふたつの確率過程が有限次元分布の意味で等しいことを $=_D$ で表わす．さらに，幾つかの概念を定義しておく．

点過程 $\{N(t)\}$ に対しては，その到着率 $\lambda(t)$ を次のような $\{N(t)\}$ に適合する確率強度として定義しておく [1]．

確率強度 (stochastic intensity) ：(Ω, P) を基礎の確率空間とし，点過程 $\{N(t)\}$ は増大情報系 $\{\mathcal{F}_t\}$ に適合しているとする．非負の $\mathcal{F}_t$-発展的過程 (progressive process) $\{\lambda(t)\}$ が $\int_0^t \lambda(s)ds < \infty$ P-a.s. を満たし，全ての非負 $\mathcal{F}_t$-可予測過程 (predictable process) $\{C(t)\}$ に対して次を満たす時，$\{N(t)\}$ は確率強度 $\lambda(t)$ に適合しているという．

$$\mathrm{E}\left(\int_0^\infty C(s)dN(s)\right) = \mathrm{E}\left(\int_0^\infty C(s)\lambda(s)ds\right) \tag{3}$$

例えば，二重確率ポアソン過程 (doubly stochastic Poisson process: DSPP) ではこの $\lambda(t)$ が時刻 t におけるポアソン過程の生起率に対応する．$\lambda(t)$ の自己相関関数は

$$\rho(t) = \frac{\mathrm{Cov}(\lambda(0), \lambda(t))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\lambda(0))}\sqrt{\mathrm{Var}(\lambda(t))}} \tag{4}$$

で与えられる．また，時間スケールの変化に対する $\{N(t)\}$ の平滑化傾向を表わす量として index dispersion of count (IDC) を $\eta(t) = \mathrm{Var}(N(t))/\mathrm{E}(N(t))$ で定義しておく．$\{N(t)\}$ がポアソン過程の場合は $\eta(t) = 1$, $t \geq 0$ となる．

次に，確率過程 $\{Y(t)\}$ の離散時間版を定義する．Δ を単位時間とし，離散時間確率過程 $\{X_Y(n,\Delta)\}$ を

$$X_Y(n,\Delta) = Y((n+1)\Delta) - Y(n\Delta),\ n \geq 0 \tag{5}$$

で与える．この場合，時間スケールの変換は複数の時点を集めることに対応する．そこで，時間スケールを m 倍，大きさを $m^{-\gamma}$ 倍にして構成した確率過程 $\{X_Y^{(m,\gamma)}(n,\Delta)\}$ を次式で与えておく．

$$X_Y^{(m,\gamma)}(n,\Delta) = m^{-\gamma}\sum_{j=0}^{m} X_Y(nm+j,\Delta),\ n \geq 0 \tag{6}$$

γ は自己相似性を特徴付ける重要な量となる．なお，以下では簡略化のために Δ を省いて記述する．$\{X_Y^{(m,\gamma)}(n)\}$ の自己相関関数は γ に依存しないことから

$$r_Y^{(m)}(k) = \frac{\mathrm{Cov}(X_Y^{(m,1)}(0), X_Y^{(m,1)}(k))}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_Y^{(m,1)}(0))}\sqrt{\mathrm{Var}(X_Y^{(m,1)}(k))}} \tag{7}$$

で与えることができる．($m = 1$ の時は $r_Y(k) = r_Y^{(1)}(k)$ と記述する．) ところで，点過程 $\{N(t)\}$ の IDC $\eta(t)$ は $X_N^{(m,1)}(n)$ を用いて次のように表わされる．

$$\eta(m\Delta) = \frac{m\mathrm{Var}(X_N^{(m,1)}(0))}{\mathrm{E}(X_N^{(m,1)}(0))} \tag{8}$$

この関係式は IDC の漸近特性を議論する上で有効となる．

3.2 ベキ乗関数と指数関数

確率過程の長期依存性と自己相似性の定義を理解する上で，ベキ乗関数 と指数関数の対比は非常に有効である．そこで，点過程 $\{N(t)\}$ の到着率の自己相関関数を $\rho_1(t) = t^{-\alpha}$, $t \geq 1, \alpha > 0$ または $\rho_2(t) = e^{-\beta t}$, $t \geq 0$, $\beta > 0$ で与え，その性質を見ていく．

まず，時間スケールを h 倍にしてみる．ベキ乗関数では $\rho_1(h \cdot t) = h^{-\alpha}\rho_1(t)$ となり，相関関数の形は定数倍 $(h^{-\alpha})$ を除いて不変となる．これに対し，指数関数では $\rho_2(h \cdot t) = e^{-(\beta h)t}$ となり，そのような不変性は見られない．逆に指数関数では時間が $1/\beta$ だけ大きくなると値が $1/e$ 倍になるという性質があり，$1/\beta$ が自己相関関数を特徴付ける時間となっている．この時間は緩和時間 (relaxzation time) とも呼ばれ [6]，対象とする確率過程の状態分布が十分定常に近付くまでの時間の目安を与える．ベキ乗関数では時間スケールの変換に対する不変性 (自己相似性) より，このような特徴的な時間というものは存在しない．

次に時間を h 経過させた場合を考える．指数関数では，$\rho_2(t+h) = \rho_2(t)\rho_2(h)$ となり，時刻 t 以降の自己相関関数の減少は h のみに依存する．しかし，ベキ乗関数では，$\rho_1(t+h) = (t+h)^{-\alpha}$ となり，時刻 t 以降の自己相関関数の減少が時刻 t の値にも依存してしまう．このようにベキ乗関数では経過時間あるいは絶対時刻というものが特別な意味を持ってくる．さらに，全過程における相関の影響を表わす量としてその積分値 $\int_1^\infty \rho_1(t)dt$ と $\int_0^\infty \rho_2(t)dt$ を考えてみる．この積分値は待ち行列モデルの性能を考える上で鍵になる量である．指数関数の場合は常に有限の値に収束する．これに対し，ベキ乗関数の場合は $\alpha \leq 1$ の時，この値が発散してしまう．

3.3 長期依存性と自己相似性

(1) 長期依存性

長期依存性とは，時間的に十分離れていても過去の影響が強く残ることを意味し，自己相関関数の積分値 (和) が発散することとして定義される．ここでは対象とする確率過程の長期依存性を以下のように定義する．

長期依存性 **(long-range dependence)**：式 (4), (7) で定義された $\rho(t)$ または $r_Y(t)$ が次を満たす時，入力過程 $\{Y(t)\}$ は長期依存性を持つという．

$$\int_0^\infty \rho(t) \quad = \quad \infty \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_Y(k) \quad = \quad \infty \tag{10}$$

ところで，式 (9), (10) の左辺が発散するかどうかは，$\rho(t)$ や $r_Y(k)$ の漸近的な性質によって決まってくる．そこで，これらの式の代わりにベキ乗関数を用いて次のように長期依存性を定義する場合もある．

$$\rho(t) \quad \sim \quad L_1(t)t^{-\beta_1} \quad \text{as} \quad t \to \infty \tag{11}$$

$$r_Y(k) \quad \sim \quad L_2(k)k^{-\beta_2} \quad \text{as} \quad k \to \infty \tag{12}$$

ここで，β_i は $0 < \beta_i < 1$ を満たす定数，$L_i(x)$ は x が十分大きな領域で非常に緩やかに変動する関数で，任意の $y > 0$ に対して $\lim_{x\to\infty} L_i(x \cdot y)/L_i(x) = 1$ を満たす．

ちなみに，自己相関関数の積分値 (和) が有界なこと，あるいは，それが漸近的に指数関数で与えられることを短期依存性 (short-range dependence) という．後者の場合には，3.2 での説明のように相関を考慮する上での特徴的な時間長というものが存在する．Markovian arrival process (MAP) [7] などのマルコフ型の入力過程は主にこの短期依存性を持つクラスに分類される．

自己相似性　時間スケールの変換に対し不変に保たれる量として，ここでは有限次元分布と 2 次の特性量 (分散と自己共分散) を考える．初めに，前者を基にした定義を示す [8]．

厳密な自己相似性 **(exactly self-similarity)**：増分過程 $\{R(t)\}$ の増分が任意の $h > 0$ と 任意の t_0 に対して次を満たす時，その増分は H を Hurst パラメータとする自己相似性を持つという．

$$\{h^{-H}R(t_0 + h \cdot t) - R(t_0)\} =_D \{R(t_0 + t) - R(t_0)\} \tag{13}$$

H の値については長期依存性との関係から通常は $1/2 < H < 1$ の範囲で考える場合が多い[3]．この定義から明らかなように，$\{R(t)\}$ から構成された離散時間確率過程は，任意の $m \geq 1$ に対して $\{X_R^{(m,H)}(n)\} =_D \{X_R(n)\}$ という性質を持つ．一般の離散時間確率過程に対してはこの式により厳密な自己相似性が定義される．

次に式 (7) で定義された自己相関関数 $r_Y(k)$ を基にした自己相似性の定義を示す．まず，$\{Y(t)\}$ より構成された離散時間確率過程 $\{X_Y(n)\}$ に弱定常性を仮定し，その平均を $\mu_Y = \mathrm{E}(X_Y(n))$，分散を $\sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(X_Y(n))$ とおく．2 次の自己相似性の定義は，時間距離 k の全領域に関しての定義と漸近的な性質についての定義に分かれ，以下のように与えられる [17]．

厳密な 2 次の自己相似性 (exactly second-order self-similarity)： 次式が成り立つ時，$\{X_Y(n)\}$ は H を Hurst パラメータとする厳密な 2 次の自己相似性を持つという．

$$r_Y(k) = \frac{1}{2}\nabla^2(k^{2H}),\ k \geq 0 \tag{14}$$

ここで，∇^2 は次のような 2 次の差分作用素である．

$$\nabla^2(f(k)) = f(k+1) - 2f(k) + f(k-1) \tag{15}$$

厳密な 2 次の自己相似性に関連した性質としては，式 (12) で示した長期依存性[4]の他に次が挙げられる．

$$\mathrm{Var}(X_Y^{(m,1)}(n)) = \sigma_Y^2 m^{-2(1-H)} \tag{16}$$

$$r_Y^{(m)}(k) = r_Y(k),\ k \geq 0 \tag{17}$$

これら式 (16) と (17) は，$\{X_Y^{(m,H)}(n)\}$ が $\{X_Y(n)\}$ と同じ分散と自己共分散を持つことを示し，自己相似という言葉の由来となっている．もともと []Will95 では式 (12)(16)(17) で厳密な 2 次の自己相似性を定義した．しかし，これらの式は以下の関係を持つことから，式 (14) または式 (16) による定義が最も冗長性の少ない定義となる．

$$\text{式 (12)} \Longleftarrow \text{式 (14)} \Longleftrightarrow \text{式 (16)} \Longrightarrow \text{式 (17)}$$

ところで，対象が点過程 $\{N(t)\}$ の場合，式 (8) と (16) より，$t \to \infty$ の時，IDC $\eta(t)$ は発散することが分かる．

漸近的な 2 次の自己相似性 (asymptotically second-order self-similarity) ： 全ての $k \geq 0$ に対して次が成り立つ時，$\{X_Y(n)\}$ は H を Hurst パラメータとする漸近的な 2 次の自己相似性を持つという．

$$r_Y^{(m)}(k) \to \frac{1}{2}\nabla^2(k^{2H}) \quad \text{as} \quad m \to \infty \tag{18}$$

漸近的な 2 次の自己相似性とは十分大きな時間スケールの領域において，その時間スケールを変化させても 2 次の確率的挙動が変化しないことを意味する．また，長期依存性との関係は次で与えられる．

$$\text{「式 (12) で } L_2(k) \text{ が定数」} \Longrightarrow \text{式 (18)}$$

[3]式 (11), (12) の β_i と H の間には $\beta_i = 2(1-H)$ という関係がある．
[4]この場合は，$L(n) = H(2H-1)$, $\beta_2 = 2(1-H)$ となる．

4　トラヒックモデル

長期依存性や自己相似性を持つトラヒックモデル (確率過程モデル) は，これまでにも様々なものが提案されてきている．ここではその一部を紹介する．いずれのモデルも従来からあるモデルを基に構成されている．構成方法としては，非整数階の積分や差分， heavy-taild 分布に従う確率変数の適用 (例えば，サービス時間分布としての利用)，重ね合わせの極限操作等があげられる．確率変数 U が heavy-taild 分布に従うとは， U の分布の裾が次のようにベキ乗関数に漸近することを指す．

$$\Pr(U > u) \sim cu^{-\alpha} \quad \text{as} \quad u \to \infty, \tag{19}$$

ここで，α は $1 < \alpha < 2$ を満たす定数であり，c はある正の定数を表わす．α に関する条件により，$\mathrm{E}(U) < \infty$, $\mathrm{Var}(U) = \infty$ が得られる．このような heavy-tailed 分布の例としては，パレート分布 $\Pr(U > u) = (a/u)^{\alpha}$, $u \geq a > 0$ がある．

ちなみに，以下で取り上げるモデル以外には，再生過程やセミマルコフ過程の再生間隔が heavy-taild 分布に従うもの [4, 14] やカオス写像を応用したもの [5] 等がある．

4.1　ブラウン運動からの構成

最も初期に提案されたのが fractional ブラウン運動 (fractional Brownian motion: FBM) $R(t)$ であり，H を Hurst パラメータ，b_0 を初期値とする FBM は通常のブラウン運動 $B(t)$ より以下の式で構成される [8]．

$$\begin{aligned} R(0) &= b_0 \\ R(t) - R(0) &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{t} w(t,s) dB(s) \end{aligned} \tag{20}$$

ここで，$\Gamma(x)$ はガンマ関数 $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ であり，$w(t,s)$ は次で与えられる関数である．

$$w(t,s) = \begin{cases} (t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}, & -\infty < s \leq 0 \\ (t-s)^{H-1/2}, & 0 < s \leq t \end{cases} \tag{21}$$

この FBM は定常な増分を持ち，式 (13) の意味で厳密な自己相似性を示す．また，それを式 (5) により離散時間化して構成した確率過程 $\{X_R(n)\}$ は式 (14) の意味で厳密な 2 次の自己相似性を示す．FBM を用いたトラヒックモデル $A(t)$ は 正規化された FBM $R(t)$ ($b_0 = 0$, $\mathrm{Var}(R(t)) = |t|^{2H}$ となるようにしたもの) を用いて ，次のように構成される．

$$A(t) = \lambda t + \sqrt{a\lambda} R(t), \ -\infty < t < \infty \tag{22}$$

ここで，λ は平均到着率 $(\mathrm{E}(A(t)) = \lambda t)$，$a$ は分散係数 $(\mathrm{Var}(A(t)) = a\lambda |t|^{2H})$ である．この $A(t)$ はトラヒックモデルとしては流体モデルや拡散モデルに分類されるものであり，冒頭に示した待ち行列長分布の裾の分析 [3, 9] など，自己相似性を考慮した待ち行列モデルの解析において中心的な存在となっている．

ところで，d 階の積分作用素 I^d を

$$I^d f(x) = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_{-\infty}^{x} (x-y)^{d-1} f(y) dy \tag{23}$$

で定義すると， 式 (20) は積分階数 d として非整数値 $(d = H + 1/2)$ を考えた場合に相当する．このような非整数階の積分はフラクタル構造を考える上で重要な概念であり，次の fractional ARIMA 過程も同様な観点から構成される．

4.2 ARIMA 過程からの構成

ここでは，確率過程 $\{Y(t)\}$ から式 (5) で構成された離散時間確率過程 $\{X_Y(n)\}$ のモデルを考える．$\{X_Y(n)\}$ が ARIMA(p,d,q) 過程 (autoregressive integrated moving average process, p, d, q はいずれも正整数) [10] であるとは，$\{(1-\Phi)^d X_Y(n)\}$ が次数 (p,q) の自己回帰移動平均過程 (autoregressive moving average process: ARMA 過程) になることとして定義される．ここで，Φ は後退作用素であり，$\Phi X_Y(n) = X_Y(n-1)$ を満たす．Fractional ARIMA 過程 (FARIMA 過程) とは ARIMA(p,d,q) 過程の定義における d を次式を用いて非整数へ拡張したものである．

$$(1-\Phi)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} d \\ k \end{array} \right) (-\Phi)^k \tag{24}$$

この FARIMA(p,d,q) 過程は，$0 < d < 1/2$ で，かつ，基となる ARMA 過程が定常であれば定常となる．また，式 (18) の意味で漸近的な 2 次の自己相似性を示す．例えば， FARIMA$(0,d,0)$ 過程 (基となる白色雑音の分散は 1 とする) の自己相関関数の漸近特性は次式で与えられる．

$$r_Y(k) \sim \frac{(-d)!}{(d-1)!} k^{2d-1} \quad \text{as} \quad k \to \infty \tag{25}$$

この式より，Hurst パラメータ H と d の関係は $H = d + 1/2$ であることが分かる．FARIMA(p,d,q) 過程 $\{X_Y(n)\}$ の漸近的な特性は，FARIMA$(0,d,0)$ 過程の場合と同様にして与えられる．また，時点 n が比較的小さな領域での特性は次数 (p,q) の ARMA 過程 $\{(1-\Phi)^d X_Y(n)\}$ によって支配される．このように FARIMA 過程は，漸近特性とそれ以外の特性を分けて表現できる点で FBM に比べ自由度が高くなっている．しかし，トラヒックの生成方法としての利用はあるが，待ち行列解析の入力モデルとしての利用はあまりないようである．

4.3 $M/G/\infty$ の系内客数過程からの構成

長期依存性を示す点過程 $\{N(t)\}$ の構成を考える．$\{N(t)\}$ が DSPP であれば，その到着率 $\lambda(t)$ の自己相関関数が式 (11) を満たすように構成すればよい．ここでは $M/G/\infty$ モデルの系内客数過程 $\{L(t)\}$ を用いる場合について紹介する [13]．

$M/G/\infty$ モデルにおける客の到着率を λ_0 とし，サービス時間 U がパレート分布 $\Pr(U > u) = (a/u)^\alpha$, $u \geq a > 0$, $1 < \alpha < 2$ に従うとする．また，$\{L(t)\}$ は定常であるとする．この時，$L(t)$ の自己相関関数 $\rho_L(t)$ は次で与えらる．

$$\rho_L(t) = \frac{\lambda_0 a^\alpha}{\alpha - 1} t^{1-\alpha} \tag{26}$$

よって，最も単純には $\lambda(t) = L(t)$ と置くことにより長時間依存性を示す DSPP が構成できる．このような $M/G/\infty$ の系内客数過程を用いた構成は，長期依存性を示すトラヒックの生成方法として利用されている他に，WAN におけるトラヒックが長期依存性を示す根拠ともなっている．すなわち，ランダムに発生するデータ転送要求において，そのデータ長が heavy-taild 分布に従う場合，それらデータをパケットに分割して転送すると，WAN 内で多重化されたパケットの発生過程は長期依存性を示すというのがその根拠である．

4.4 ON-OFF 過程からの構成

ここでは，ON 期間長及び OFF 期間長が共に heavy-tailed 分布に従う離散時間 ON-FF 過程を考え，その重ね合わせが漸近的に FBM となることを紹介する [16] ．

まず，j 番目の ON-OFF 過程を $\{Z_i(n)\}$ とする．この $\{Z_i(n)\}$ は，$Z_i(n) = 1$ （ ON 期間中 ）であれば客 (パケット等) をひとり発生し，$Z_i(n) = 0$ （ OFF 期間中 ）であれば何も発生しない．ON 期間長及び

OFF 期間長は独立で同一の分布に従うとし，ON (OFF) 期間長 U は式 (19) で与えられる heavy-tailed 分布 (ベキ乗指数は α) に従うものとする．次に，それら離散時間 ON-OFF 過程を k 個重ね合わせたものを $X(n,k) = 1/k \sum_{i=1}^{k} Z_i(n)$ で与える．さらに，$X(n,k)$ の時間スケールを m 倍，大きさを m^{-1} 倍に変換したものを $X^{(m,1)}(n,k)$ (式 (6) 参照) とする．以上の条件の下で k と m を大きくしていくと，$\{X^{(m,1)}(n,k)\}$ は FGN (Fractional Gaussian Noise) $\{G_n(H,\sigma)\}$ へ次の形で法則収束する．

$$\begin{aligned} & \lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} m^{1-H} k^{1/2} (X^{(m,1)}(n,k) - \frac{1}{2}) \\ =_D \quad & G_n(H,\sigma) \end{aligned} \tag{27}$$

ここで，$H = (3-\alpha)/2$ は Hurst パラメータ，$\sigma^2 = c/\{4E(U)\,2(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)\}$ は分散パラメータである．FGN $\{G_n(H,\sigma)\}$ は，正規化された FBM $\{R(t)\}$ の離散時間版 $G_n(H,\sigma) = \sigma \cdot (R(n) - R(n-1))$ として与えられる．

ところで，ユーザ毎のパケット通信は，ON/OFF 期間長が heavy-taild 分布に従う ON-OFF 過程でモデル化されるという分析結果がある [16]．よって，ここで紹介した多重化による FBM (FGN) の構成は，LAN のトラヒックが自己相似性を示すひとつの理論的根拠となっている．

4.5 MAP からの構成

近年，相関のある入力過程として MAP を用いた待ち行列モデルの解析及び数値計算法の研究が盛んに行われている [15]．もし，長期依存性や自己相似性を示す入力過程モデルが同様の枠組みで構成できれば，これら待ち行列に関する既存の結果を応用できる可能性が出てくる．ここでは，重ね合わせの極限を取ることで長期依存性を示すモデルが構成できることを紹介する [2]．

今，i 番目の離散時間 MAP $(\boldsymbol{C}_i, \boldsymbol{D}_i)$ として定常な ON-OFF 過程 $\{Z_i(n)\}$ を考え，$\boldsymbol{C}_i$, $\boldsymbol{D}_i$ を次で与える．

$$\boldsymbol{C}_i = \begin{pmatrix} 1-(1/a)^i & (1/a)^i \\ (1-p)(b/a)^i & (1-p)(1-(b/a)^i) \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{D}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p(b/a)^i & p(1-(b/a)^i) \end{pmatrix} \tag{29}$$

この $\{Z_i(n)\}$ は，$Z_i(n) = 1$ (ON 期間中) であれば確率 p で客をひとり発生し，$Z_i(n) = 0$ (OFF 期間中) であれば何も発生しない．そこで，時点 n の到着率を $\lambda_i(n) = pZ_i(n)$ で定義する．次に，このような ON-OFF 過程を m 多重した確率過程 $\{Z^{(m)}(n)\}$ を $Z^{(m)}(n) = \sum_{i=1}^{m} Z_i(n)$ (各過程は互いに独立とする) で定義し，その到着率を $\lambda^{(m)}(n) = p\sum_{i=1}^{m} Z_i(n)$ とし，$\lambda^{(m)}(n)$ の自己相関関数を $\rho^{(m)}(k) = \mathrm{Cov}(\lambda^{(m)}(0), \lambda^{(m)}(k))/\mathrm{Var}(\lambda^{(m)}(0))$ で与える．以上の設定の下，$m \to \infty$ とした時の自己相関関数は次で与えられる．

$$\rho^{(\infty)}(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(1-(1/a)^i - (b/a)^i\right)^k \frac{p^2 b^i}{(1+b^i)^2} \tag{30}$$

この式より，$b^2 \le a$ の時，$\{Z^{(\infty)}(n)\}$ は 式 (10) の意味で長期依存性を示すことが分かる．

5 おわりに

長期依存性や自己相似性を示すトラヒックモデルについては，実トラヒックの分析やパラメータの推定といった多くの検討がなされている．それらについては関連する文献を参照願いたい．

参考文献

[1] P. Brémaud: *Point Processes and Queues*; Springer-Verlag, New York (1981).

[2] T. Daniëls and C. Blondia: A discrete-time ATM traffic model with long range dependence characteristics; *PMCCN '97, Tsukuba*, pp. 111–124 (1997).

[3] N. G. Duffield and N. O'Connell: Large deviations and overflow probabilities for the general single-server queue, with applications; *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 118, pp. 363–374 (1995).

[4] N. G. Duffield and W. Whitt: A source traffic model and its transient analysis for network control; *Stochastic Models*, Vol. 14, No. 1&2, pp. 51–78 (1998).

[5] A. Erramilli, R. P. Singh, and P. Pruthi: Chaotic maps as models of packet traffic; ITC 14, pp. 329–338 (1994).

[6] J. Keilson: *Markov Chain Models - Rarity and Exponentiality*; Springer-Verlag (1979).

[7] D. M. Lucantoni: New results for the single server queue with a batch Markovian arrival process; *Stochastic Models*, Vol. 7, pp. 1–46 (1991).

[8] B. B. Mandelbrot and J. W. V. Ness: Fractional Brownian motions, fractional noises and applications; *SIAM Review*, Vol. 10, No. 4, pp. 422–437 (1968).

[9] I. Norros: A storage model with self-similar input; *Queueing Systems*, Vol. 16, pp. 387–396 (1994).

[10] J. R. M. Hosking: Fractional differencing; *Biometrika*, Vol. 68, No. 1, pp. 165–176 (1981).

[11] 小沢, 町原, 石橋: マルチメディアトラヒック理論の最新動向; 電子情報通信学会誌, Vol. 81, No. 5, pp. 506–515 (1998).

[12] 小沢利久: いろいろな入力過程モデル; 日本オペレーションズ・リサーチ学会誌, Vol. 43, No. 12, pp. 680–686 (1998).

[13] V. Paxson and S. Floyd: Wide area traffic: The failure of Poisoon modeling; *IEEE/ACM Transactions on Networking*, Vol. 3, No. 3, pp. 226–244 (1995).

[14] B. Ryo and S. B. Lowen: Point process models for self-similar network traffic, with applications; *Stochastic Models*, Vol. 14, No. 3, pp. 735–761 (1998).

[15] 高橋, 牧本: 相型分布と行列解析法; 日本オペレーションズ・リサーチ学会誌, Vol. 43, No. 11, pp. 618–623 (1998).

[16] M. S. Taqqu, W. Willinger, and R. Sherman: Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling; *Computer Communication Review*, Vol. 27, No. 2, pp. 5–23 (1997).

[17] B. Tsybakov and N. D. Geogranas: On self-similar traffic in ATM queues: definitions, overflow probability bound, and cell delay distribution; *IEEE/ACM Transactions on Networking*, Vol. 5, No. 3, pp. 397–409 (1997).

[18] W. Willinger, M. S. Taqqu, W. E. Leland, and D. V. Wilson: Self-similarity in high-speed packet traffic: analysis and modeling of Ethernet traffic measurements; *Statistical Science*, Vol. 10, No. 1, pp. 67–85 (1995).