待ち行列研究の新しい潮流 (4)
いろいろな入力過程モデル*

小沢 利久
Department of Business Administration, Komazawa University

1-23-1 Komazawa, Setagaya-ku, Tokyo 154-8525, Japan
E-mail: toshi@komazawa-u.ac.jp

1999.10.18

1 はじめに

近年における待ち行列理論の展開のひとつの流れとして，対象とする入力過程モデルの多様化があげられる．例えば，マルコフ型の入力過程モデルとしては，最も基本的なポアソン過程から始まり，MAP (Markovian arrival process) に至るまでの展開がそれに当たる．また，最近では，長期依存性 (long-range dependency) や自己相似性 (self-similarity) といった性質を持つ入力過程モデルも研究対象として扱われるようになってきた．その理由を待ち行列理論研究の外に求めるのであれば，そこには応用対象となるシステムの複雑化と観測技術の高度化が見えてくる．特に通信の分野では，コンピュータ通信に代表されるような技術の高度化・複雑化が MAP といった入力過程モデルの研究を盛んにさせる契機となった．また，トラヒック測定技術の進歩は非常に高精度で大量のデータを提供し，それが自己相似性といった特徴を浮かび上がらせるもととなった．そこで，今回は，通信分野におけるこのふたつの流れを軸に待ち行列理論で用いられている様々な入力過程モデルを紹介していく．

2 入力過程のモデル化

この章では，本題に入る前の準備として，入力過程モデルの一般的定義と，3 章以降でその具体化を図るための手掛かりを示す．

2.1 基本モデル

n 番目の客の到着時刻を T_n，その客の要求するサービス時間を Z_n とする．一般に，待ち行列への入力はこれらの組の列 $\{(T_n, Z_n), n \in \mathcal{Z}\}$ として表現される．ここで，$\{T_n\}$ は点過程，$\{Z_n\}$ はそれに付随するマーク過程に対応し，$\{(T_n, Z_n), n \in \mathcal{Z}\}$ はマーク付き点過程 (stochastic marked point process) [8] となる．図 1 に LAN トラヒックの例を示す．いろいろな入力過程モデルを考えることは，このマーク付き点過程に特定の構造を入れていくこととも見なせる．以下では，マーク付き点過程を出発点に，本解説で扱う幾つかの基本的な確率過程モデルを示す (図 2 参照)．また，全ての確率過程は右連続であるとする．

*This is a draft version of a paper that appeared in オペレーションズ・リサーチ (日本オペレーションズ・リサーチ学会誌), 43, 12, pp. 680–686 (1998).

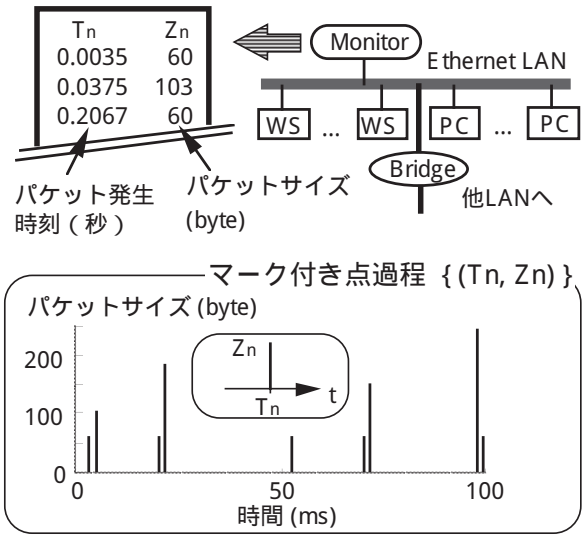

図 1: LAN トラヒックデータ

計数過程：通常扱われるモデルでは $\{T_n\}$ と $\{Z_n\}$ が独立と仮定する場合が多い．そのような場合には，時間区間 $[0,t)$ での到着客数 $N(t)$ を入力過程と考えるのが便利である．客の到着時刻は $N(t)$ の増加点で表わされる．このような $\{N(t)\}$ を一般に計数過程 (stochastic counting process) または点過程という．

増分過程：待ち時間を解析する場合には，時間区間 $[0,t)$ に待ち行列へ持ち込まれる仕事量 (サービス時間の和) $W(t)$ を入力過程とするのが便利である．ここで，客の到着時刻は $W(t)$ の増加点となり，その時の増分量がサービス時間に対応する．このような $\{\mathrm{W}(t)\}$ を一般に増分過程 (stochastic additive process) という．計数過程は増分過程の特別な場合とも見なせる．

連続増分過程 (流体モデル): 川から流れ込む水を入力と考えると，ダムは客の代わりに水が入り，そして溜まり，出ていくという意味で広義の待ち行列と見なせる．今，時間区間 $[0,t)$ にダムへ入り込んだ水量を $R(t)$ とすると，増分過程と同様にして，この $R(t)$ を待ち行列への入力過程と考えることができる．本解説では，$R(t)$ が連続な軌跡を持つことから連続増分過程と呼ぶ．先ほどの $W(t)$ において仕事量が徐々に (連続的に) 系内へ入り込むとしたモデルもこの $R(t)$ で表わされる．

以下では，記号 N, W, R をそれぞれ計数過程，増分過程，連続増分過程を表わすのに用い，Y をそれらを代表するものとして用いる．また，計数過程，増分過程についてはその離散時間版を離散時間計数過程，離散時間増分過程と呼び，時点 n での増分量を $X(n) \geq 0$ で表わす．

2.2 入力過程に対する操作

ここでは後の説明で重要となる重ね合わせと時間スケールの変換について示しておく．

(1) 重ね合わせ

通信網では多数のユーザからの通信要求を共通のリソースで処理する (転送する) ことで効率を上げている．一般にこのようなトラヒック制御を多重化という．この多重化を共通リソースへの入力という観点から見れば，それは個々のユーザからの通信要求 $Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_k(t)$ からそれをを重ね合わせた確率過程

$$Y(t) \quad \equiv \quad Y_1(t) + Y_2(t) + ... + Y_k(t) \tag{1}$$

を構成することに対応する．ここで，式 (1) は，Y と $\{Y_i\}$ の確定的な関係を表わしている．本解説では，このような関係を確率過程の確定的構造と呼ぶ．

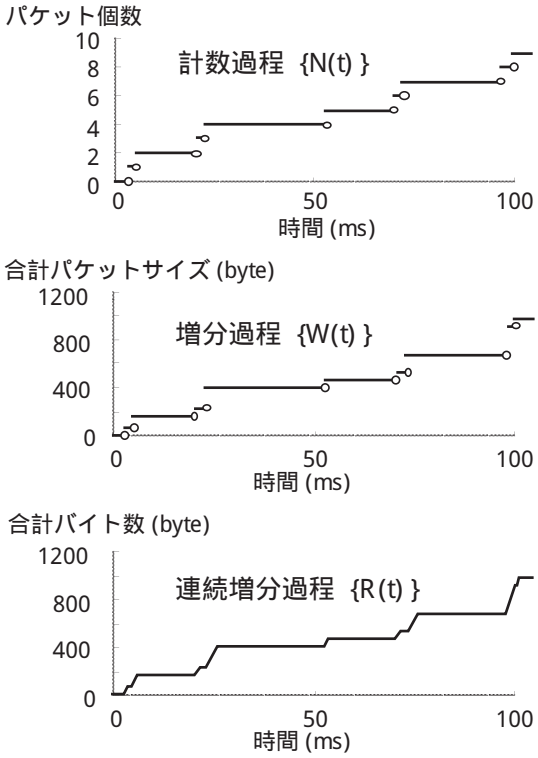

図 2: 基本的な入力過程モデル

(2) 時間スケールの変換

電話網における通信回数の集計の仕方は目的に応じて様々である．例えば，交換機内におけるトラヒック制御では，少なくとも秒から分の単位で見る必要がある．経営情報としては月から年の単位で見れば十分である．このように細部を省略しながら空間又は時間のスケールを大きくしていく操作を物理学の分野では粗視化という．後に説明する確率過程の自己相似性もこの粗視化と大きく関連している．ここではこのような操作を時間スケールの変換として定義しておく．

γ を時間と空間の変換比率を表わすパラメータとする．連続時間確率過程 $\{Y(t)\}$ の時間スケールを $\alpha\,(\in \mathcal{R}^+)$ 倍した確率過程 $\{Y^{(\alpha,\gamma)}(t)\}$ を以下で与える[1]．

$$Y^{(\alpha,\gamma)}(t) = \alpha^{-\gamma} Y(\alpha t) \tag{2}$$

また，離散時間増分過程 $\{W(n)\}$ に対しても同様に定義される．この場合は，連続する $m\,(\in \mathcal{N}^+)$ 個の時点をまとめて新たな確率過程を構成する形となり，時点 n での増分量は次で与えられる．

$$X^{(m,\gamma)}(n) = m^{-\gamma} \sum_{k=0}^{m-1} X(mn+k) \tag{3}$$

以下，$\gamma = 1$ の場合は式 (2)，(3) の γ を省略する．

2.3 モデル化の手掛かり

通信の分野で現在においても最もよく使われている待ち行列モデルは $\mathrm{M/G/S/S}$ であろう．例えば，電話網では交換機間を結ぶ回線数の算出に用いている．ここで，サーバとは回線であり，客とは回線の接続要求（呼）に対応する．ところで，なぜ入力は M（ポアソン過程）なのか．次の 3 つの理由が考えられる．

[1] この場合は時間が連続なので，時間スケールを大きくしても確率過程の細部の情報が失われることはない．

(1) 発生の仕組みから

呼の発生の仕組みから，それがポアソン過程となる合理的な説明 (物理的説明) が示せる．Grigelionis[2] は次の定理を導いた．

[定理] (非定常) ポアソン過程への収束

各 $k \geq 1$ に対して ℓ_k 個の点過程 $N_{k1}, ..., N_{k\ell_k}$ を考え，その重ね合わせを N_k とする．次の仮定を置く．

(a) $\ell_k \to \infty$ as $k \to \infty$

(b) 各 k に対し，$\{N_{ki}\}$ は互いに独立

(c) 任意の有界区間 I に対して次が成り立つ．

$\lim_{k\to\infty} \sup_{1\leq i\leq \ell_k} \Pr(N_{ki}(I) \geq 1) = 0$

この時，$k \to \infty$ において N_k が平均測度 P のポアソン過程に収束するための必要十分条件は次で与えられる．

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\ell_k} \Pr(N_{ki}(I) = 1) = P(I)$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\ell_k} \Pr(N_{ki}(I) > 1) = 0 \qquad \square$$

ところで，注目している回線へ到着する呼は非常に多くの電話機からかかってくる呼の重ね合わせとみなせる．また，個々の電話機が独立に使われ (仮定 (b))，かつ，その頻度が十分小さい (仮定 (c)) と考えることは妥当である．よって，ある回線群に加わる呼の発生をポアソン過程[2]でモデル化することは上記の定理より合理的と考えられる．

(2) 統計的分析から

呼の発生を測定，分析した結果，それがポアソン過程であるということが示されている．例えば，Bellcore での研究では，共通線信号網から得られた 1 億 7 千万にのぼる信号メッセージの解析から呼の発生過程はポアソン過程 (ただし，到着率は時刻に依存) と結論されている．

(3) 利用する立場から

入力をモデル化する目的は回線数算出に必要な評価量 (呼損率) を得たいからである．そのためには，入力過程を表わすパラメータの推定及びそれを入力とした待ち行列モデルの解析が可能かつ容易な方がよい．その点，ポアソン過程は非常に扱いやすい．

前半 2 つの理由はそのまま新たな入力過程を考える手掛かりを与える．また，最後の理由はどのように近似的な入力過程モデルを作ったらよいかの指針を与える．そこで，次の 3 章では入力生成の確定的構造に注目したモデル化を示し，4 章では統計的な特徴からのモデル化を示す．

3　2 段構造の入力過程モデル

3.1　確定的構造

通信の分野で扱われる入力過程モデルが多様化した理由を簡単にまとめれば，音声・画像を含めたあらゆる情報がディジタル符号化され，それがパケットという単位で転送されるようになり，より複雑なトラヒック制御が可能になったからと言える．ここでは音声を ATM (Asynchronous Transfer Mode) 技術を用いて転送する場合を例に入力過程モデルの確定的構造について見てみる．

ATM とはディジタル情報をセルと呼ばれる 53 bytes 固定長のパケットに分割して送る転送技術である [5]．各セルには転送経路を識別するための情報が付いており，それをもとに高速なスイッチングが実現される．また，セル単位での多重化も可能である．今，音声信号をディジタル符号化し，それをセルにして送出

[2] 人間活動は時間帯に依存するので，到着率が時刻に依存すると考えるのもまた妥当である．ただし，本解説ではそのような非斉時的な確率過程は扱わない．

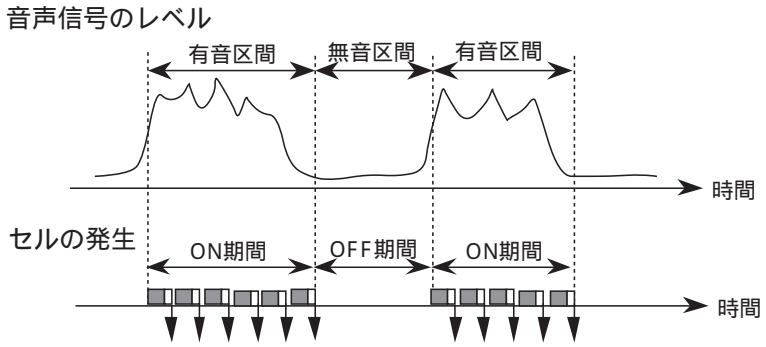

図 3: 音声信号のセル化

することを考える (図 (3)) . 通常の会話では喋っている期間 (有音期間) と喋っていない期間 (無音期間) が交互に現われる . この時 , セルは有音期間でのみ一定間隔 Δ (32 Kbps での符号化であれば $\Delta = 12\,\mathrm{ms}$ 間隔) で発生する . そこで , $\{J(t)\}$ を , 時刻 t が無音期間内であれば $J(t) = 0$, 有音期間内であれば $J(t) = 1$ の値を取る右連続な確率過程とする . セルの発生過程を表わす計数過程 $\{N(t)\}$ はこの $J(t)$ を用いて次のように表現される .

- $J(t) = 0$ の期間では $N(t)$ は変化しない .
- $J(t) = 1$ の期間では $N(t)$ は Δ 間隔で 1 ずつ増える .

一般に , $J(t) = 0$ の期間を ON 期間 , $J(t) = 1$ の期間を OFF 期間といい , このような $\{N(t)\}$ を ON-OFF 過程という . 即ち , 音声信号をセル化した入力過程は ON-OFF 的な確定的構造を持つ .

次に , k 個の音声セル過程 $\{N_i(t)\}, i = 1, 2, ..., k$ の多重化 (重ね合わせ) $\{N(t)\}$ の確定的構造について考える . 今 , 時刻 t において ON 期間にある音声セル送出過程の数を $J(t)$ とする . セルが発生するタイミングを無視すれば $\{N(t)\}$ は以下の構造を持つ .

- $J(t) = \ell, 0 \leq \ell \leq k$ である期間では $N(t)$ は Δ 間隔毎に ℓ 増加する .

以上で示した確定的構造の特徴を一般的に言えば , ある基となる確率過程があり , 注目している入力過程の挙動はその基となる確率過程の状態が与えられれば比較的簡単に表現されるという点にある . このような 2 段階の構造は WWW のトラヒック [4] などにも見られる , ある種普遍的な構造と言える .

3.2 確率過程モデル

ここでは , 前節で与えた $N(t)$ にマルコフ的な確率構造を入れていく .

(1) マルコフ型計数過程としてのモデル化

まず , ON-OFF 過程 $\{N(t)\}$ のモデル化を考える . 待ち行列モデルとしての解析容易性を考慮した最も単純な $\{N(t)\}$ の確率過程モデルは , $J(t)$ を 2 状態の連続時間マルコフ連鎖とし , ON 期間 ($J(t) = 1$) ではポアソン過程に従ってセルが発生するとしたものであろう[3] . OFF 期間 ($J(t) = 0$) ではもちろんセルは発生しない . このような $\{N(t)\}$ を IPP (interrupted Poisson process) といい , その数学的な表現は $J(t)$ の初期分布ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_0, p_1)^T, p_j = \Pr(J_1(0) = j)$, $J(t)$ の無限小生成行列 $\boldsymbol{Q}$, および , 各状態での到着率を対角成分に持つ行列 $\boldsymbol{D}$ で与えられる . $\boldsymbol{Q}$ と $\boldsymbol{D}$ は次のようになる .

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -r_{01} & r_{01} \\ r_{10} & -r_{10} \end{pmatrix} \quad \mathrm{diag}\boldsymbol{D} = (0,\, \lambda_0) \tag{4}$$

[3] 音声セル送出過程のモデル化では , 当然ながら ON 期間や OFF 期間の分布推定などの統計的分析が必要となるが , ここでは言及しない . 例えば , [10] を参照 .

ここで，r_{01} は OFF から ON へ変化する率，r_{10} は ON から OFF へ変化する率，λ_0 は ON 状態においてセルが発生する率を表わしている．$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{D}$ として $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ で IPP を特徴付ける場合も多い．

以上の定義から分かるように，f_j を状態 j での到着率とすると，時刻 t での到着率 $\lambda(t)$ は以下で与えられる．

$$\lambda(t) = f_{J(t)} \tag{5}$$

また，$N(t)$ の分布行列を $\boldsymbol{P}(n,t) = (P_{ij}(n,t))$, $P_{ij}(n,t) = \Pr(N(t) = n, J(t) = j \,|\, J(0) = i)$ と置くと，その z 変換形 $\boldsymbol{P}^*(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \boldsymbol{P}(n,t)$ は次で与えられる．

$$\boldsymbol{P}^*(z,t) = \exp((\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}z)t) \tag{6}$$

次に，このような IPP でモデル化された ON-OFF 過程を k 個重ね合わせた過程を改めて $\{N(t)\}$ と置き，その確率過程モデルを考える．この時，$\{J(t)\}$ は出生死滅過程となり，その無限小生成行列は 3 重対角行列 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ として次で与えられる．

$$q_{i+1,i} = (i+1)r_{10}, \quad 0 \le i \le k-1$$
$$q_{i,i+1} = (k-i)r_{01}, \quad 0 \le i \le k-1$$
$$q_{i,i} = -q_{i-1,i} + q_{i,i+1}, \quad 1 \le i \le k-1$$
$$q_{00} = -q_{01}, \quad q_{kk} = -q_{k-1,k}$$

また，$J(t) = j$ の時にセルが発生する率は $j\lambda_0$ となることから，セルの発生率を表わす行列 $\boldsymbol{D}$ は $\mathrm{diag}\boldsymbol{D} = (0,\ \lambda_0,\ ...,\ k\lambda_0)$ で与えられる．この場合にも，$\lambda(t)$ は IPP と同様に式 (5) で与えられ，$N(t)$ の分布行列の z 変換は式 (6) で与えられる．

一般に，$\{J(t)\}$ を連続時間マルコフ連鎖とし，その状態によりポアソン過程の生起率が決まるような計数過程を MMPP (Markov modulated Poisson process) という．さらに広いクラスへの拡張として，$J(t)$ の状態変化時点でも到着が起きるとしたもの（$\boldsymbol{D}$ には対角成分以外にも正の要素が入る）が MAP [6] となる．

ところで，入力過程の時間軸上での変化を特徴付ける量のひとつとして到着率 $\lambda(t)$ の自己相関関数 $r(t)$ が挙げられる（次式）．

$$r(t) = \mathrm{Cov}(\lambda(0), \lambda(t))/\mathrm{Var}(\lambda(0)) \tag{7}$$

MMPP において，$J(t)$ の初期状態ベクトル $\boldsymbol{p}$ をその定常分布ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ に置くと，$\lambda(t)$ は定常過程となり，$r(t)$ は次で与えられる．

$$r(t) = \frac{\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{D}(\exp(\boldsymbol{Q}t) - \boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}^T)\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{D}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}^T)\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}} \tag{8}$$

ここで，$\boldsymbol{e}$ は全要素が 1 の縦ベクトルである．式 (8) において，十分大きな t に対し $\exp(\boldsymbol{Q}t)$ が $\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}^T$ へ指数的に近付くことから，十分大きな t に対し $r(t)$ が指数的に減少することが分かる．この特徴が後に説明する長期依存性をもった入力過程との大きな差となっている．

(2) マルコフ型離散時間計数過程としてのモデル化

音声信号をセルにして送る場合，有音期間では一定間隔 Δ でセルが生成されるので，この Δ を単位時間として離散時間モデルを構築してもよい．この場合もマルコフ型計数過程とほぼ同様のモデル化が可能である．即ち，ON-OFF 過程では，$\{J(n)\}$ を 2 状態マルコフ連鎖とし，ON 期間では各時点で $N(n)$ の値が 1 だけ増加するようにすればよく，これが IPP の離散時間計数過程版に対応する．MMPP や MAP についても同様に対応する離散時間計数過程を構成することができる．今，ある時点での状態が j で，その直前の状態が i であった時の，その時点での到着数が f_{ij} で与えられるとする．この時，時点 n での到着数 $X(n) = N(n) - N(n-1)$ は以下で与えられる．

$$X(n) = f_{J(n-1),J(n)} \tag{9}$$

これが先ほどの式 (5) に対応する．さらに，f_{ij} を正の実数値を取る確率変数 F_{ij} に拡張したものが離散時間マルコフ増分過程となり，式 (9) の $=$ は $=_d$ (分布が等しい意味) に置き換えられる[4]．

(3) マルコフ型連続増分過程としてのモデル化

ATM の場合には，セルの大きさが十分小さく，かつ，一定であることから，仕事量が連続的に流入する連続増分過程としてモデルを構築してもよい．この場合もマルコフ型計数過程とほぼ同様のモデル化が可能である．即ち，ON-OFF 過程では，$\{J(t)\}$ を 2 状態連続時間マルコフ連鎖とし，ON 期間では $R(t)$ の値が一定の傾き λ で増加するようにすればよい．これが，IPP の連続増分過程版に対応する．MMPP についても同様に対応する連続増分過程を構成することができ，この時は $J(t)$ の値で $R(t)$ の増加する傾きが決まる．すなわち，状態 j での傾きを f_j とすると，可算個の点を除いて

$$\frac{dR(t)}{dt} = f_{J(n)} \tag{10}$$

となる．これが式 (5) に対応する．

以上，マルコフ的な範囲で幾つかの入力過程モデルを示した．もちろん，基になる確率過程 $\{J(t)\}$ をもっと広いクラスに拡張することでさらに多様な入力過程モデルを構成することは可能である．

3.3 待ち行列の出力過程

待ち行列網ではある待ち行列からの出力過程が他の待ち行列への入力過程となる．別の見方をすれば待ち行列そのものが入力過程に対する操作となる．このような待ち行列からの出力過程も，特定のモデルについては 2 段構造の入力過程モデルとしてモデル化できる．例えば，PH/PH/S であれば，系内客数，到着間隔の位相，サービス時間の位相の 3 つの量の変化を表わすマルコフ過程を基になる確率過程 $\{J(t)\}$ とすることで，その出力過程を MAP として表現することができる．ただし，この場合は $\{J(t)\}$ の状態数が可算個となる．

4 自己相似的な入力過程モデル

4.1 統計的な特徴

通信分野において確率過程の自己相似性が検討される契機となったのは LAN トラヒックの分析であった [12] ．まず初めにその現象を図 4 に示す．この図は Bellcore で測定されたパケット数の時系列データであり，各グラフは 0.01 秒から 10 秒までの異なる時間単位で集計されている．時間オーダが 4 桁も異なるにも係わらず，各グラフともほぼ同様の激しい変動を示しており，時間スケールの変換に対する変動傾向の不変性という特性が窺える．以下では，この LAN トラヒックを離散時間増分過程 $\{W(n)\}$ ($\{X(n)\}$ をその増分列) として分析する (関連する話題は [9] を参照 .)

ところで，時間スケールを大きくしていった場合に確率過程 $\{X(n)\}$ の変動がどのように減少していくかは，m を大きくしていった場合の $X^{(m)}(n)$ (式 (3) 参照) の分散の変化により見ることができる．前章で示した離散時間マルコフ増分過程を初めとして，マルコフ型の確率過程では以下のように m^{-1} のオーダで漸近的に減少する (c_1 はある定数 .)

$$\mathrm{Var}(X^{(m)}(n)) \sim c_1 m^{-1} \quad \text{as} \quad m \to \infty \tag{11}$$

これに対し，上記の LAN トラヒックでは以下のようになっている (c_2 はある定数 .)

$$\mathrm{Var}(X^{(m)}(n)) \sim c_2 m^{-2(1-H)} \quad \text{as} \quad m \to \infty \tag{12}$$

[4] 連続時間の場合についても同様な確率過程モデルが構成でき，マルコフ増分過程 [1] と呼ばれている．

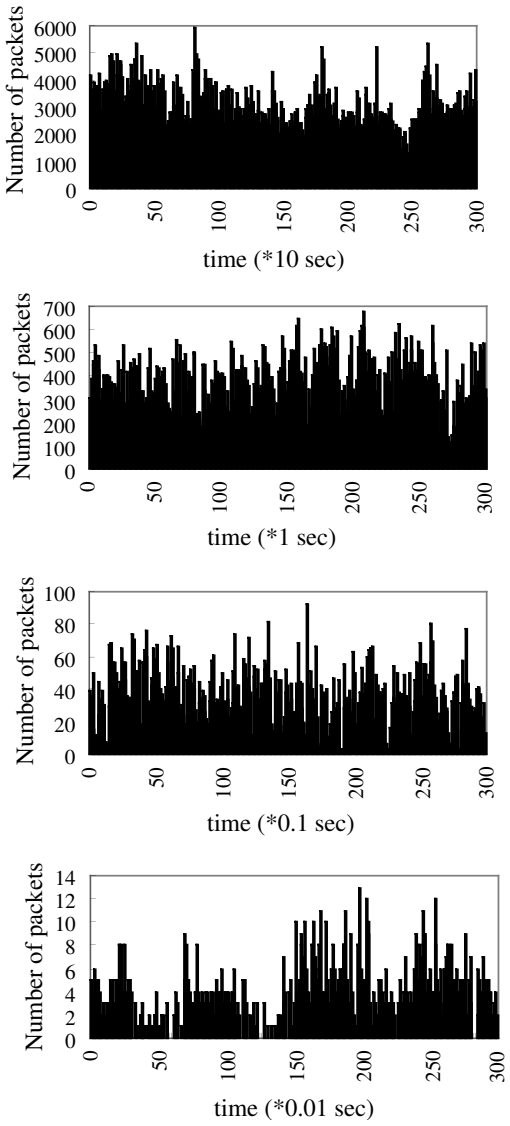

図 4: 異なる時間スケールで見たパケットの到着過程

ここで，H は Hurst パラメータ[5]と呼ばれ，このような確率過程を特徴付ける重要な量となっている．Bellcore のデータでは，$H > 0.6$，特に負荷の高い場合は $H > 0.8$ という結果を得ており，マルコフ型の確率過程に比べ，変動の減少が緩やかであることが分かる．

4.2 確率過程モデル

ここでは自己相似性の定義を与えるとともに，代表的な確率過程モデルとして fractional Brownian motion (FBM) を取り上げる．まず，離散時間増分過程 $\{W(n)\}$ が弱定常な増分列 $\{X(n)\}$ を持つとし，$X(n)$ の平均を $\mu \equiv \mathrm{E}(X(n))$，分散を $\sigma^2 \equiv \mathrm{Var}(X(n))$ と置く．自己相関関数は $r(k) \equiv \mathrm{Cov}(X(n), X(n+k))/\sigma^2$ で定義され，$r(k) \leq r(0) = 1$ の性質を持つ．また，$\{X(n)\}$ のタイムスケールを m 倍とした確率過程 $\{X^{(m,\gamma)}(n)\}$ (式 (3) 参照) の自己相関関数を $r^{(m,\gamma)}(k) = r^{(m)}(k)$ で表わす．以下では，$\delta^2(\cdot)$ を $\delta^2(f(k)) =$

[5]H. E. Hurst はナイル川の流量の解析から長期依存性という性質を導きだした．

$f(k+1)-2f(k)+f(k-1)$ を満たす演算子とし，$\beta = 2(1-H),\ (0 \le \beta \le 1)$ とする．H を Hurst パラメータとする自己相似性の定義は次で与えられる [11]．

厳密な 2 次の自己相似性 (exactly second-order self-similarity)： 次式が成り立つ時，$\{X(n)\}$ は厳密な 2 次の自己相似性を持つという．

$$r(k) = \frac{1}{2}\delta^2(k^{2-\beta}),\ k \ge 0 \tag{13}$$

ところで，2 次の自己相似性に関連した性質として次が挙げられる．

$$r(k) \sim L_1(k)k^{-\beta} \quad \text{as} \quad k \to \infty \tag{14}$$

$$\mathrm{Var}(X^{(m)}) = \sigma^2 m^{-\beta} \tag{15}$$

$$r^{(m)}(k) = r(k),\ k \ge 0 \tag{16}$$

ここで，$L_1(n)$ は $\lim_{n\to\infty} L_1(n\cdot\ell)/L_1(n) = 1,\ \ell > 0$ を満たす関数である．式 (14) は，確率過程 X の自己相関関数が，十分大きな k に対してベキ関数的に減少することを意味し，直ちに $\sum_{k=0}^{\infty} r(k) = \infty$ が導かれる．これを長期依存性という．厳密な 2 次の自己相似性を持つ場合は，$L(n) = H(2H-1)$ となる．また，式 (15)，(16) は，$\{X^{(m,H)}(n)\}$ が $\{X(n)\}$ と同じ分散と自己相関関数を持つことを示し，自己相似という言葉の由来となっている．ところで，これらの式は以下の関係を持つ[6]．

$$\text{式 (14)} \Longleftarrow \text{式 (13)} \Longleftrightarrow \text{式 (15)} \Longrightarrow \text{式 (16)}$$

漸近的な 2 次の自己相似性 (asymptotically second-order self-similarity) ： 全ての $k \ge 0$ に対して次が成り立つ時，$\{X(n)\}$ は漸近的な 2 次の自己相似性を持つという．

$$r^{(m)}(k) \to \frac{1}{2}\delta^2(k^{2-\beta}) \quad \text{as} \quad m \to \infty \tag{17}$$

漸近的な 2 次の自己相似性とは十分大きな時間スケールの領域において，その時間スケールを変化させても 2 次の確率的挙動が変化しないことを意味する．

厳密な 2 次の自己相似過程の例としては FBM [7]，漸近的な 2 次の自己相似過程の例としては fractional ARIMA 過程 (fractional autoregressive integrated moving average process) [3] がある．ここでは参考として FBM を与える公理系を示す．ただし，FBM は負の増分も許した連続時間連続増分過程であり，それを離散時間点で見たものが上記の定義を満たす．

FBM の定義：確率過程 $\{Z_H(t)\}$ が H を Hurst パラメータとする正規化された FBM であるとは以下を満たすことである．

(a) $Z_H(t)$ は定常な増分を持つ．
(b) $Z_H(0) = 0,\ \mathrm{E}(Z_H(t)) = 0$ for all t
(c) $\mathrm{Var}(Z_H(t+\tau) - Z_H(t)) = |\tau|^{2H}$
(d) $Z_H(t)$ は連続な軌跡を持つ．
(e) $Z_H(t)$ はガウス型である．

上記 (e) より，$Z_H(t)$ の分布は正規分布 $N(0, |t|^{2H})$ となる．また，この定義より $Z_H^{(\alpha,H)}(t) =_d Z_H(t)$ となる．この関係式は $Z_H(t)$ の分布が時間スケールの変換に対して不変であることを表わし (式 (3) 参照)，待ち行列モデルの解析上，非常に重要である．FBM を用いた入力過程モデル $R(t)$ は次のように構成される．

$$R(t) = \lambda t + \sqrt{\sigma\lambda}Z_H(t),\ -\infty < t < \infty \tag{18}$$

ここで，λ は平均到着率 $(\mathrm{E}(R(t)) = \lambda t)$，$\sigma$ は分散係数 $(\mathrm{Var}(R(t)) = \sigma\lambda|t|^{2H})$ である．

[6] [12] では式 (14)(15)(16) で厳密な 2 次の自己相似性を定義している．

4.3 確定的構造からの説明

ここでは，ON-OFF 構造を持った離散時間増分過程で，ON 期間長及び OFF 期間長が非常に長い裾を引く (heavy-tailed) 分布に従うものの重ね合わせが漸近的に FBM となることを紹介する [13] ．

まず，j 番目の離散時間 ON-OFF 増分過程 $\{W_j(n)\}$ の基になる確率過程 $\{J_j(n)\}$ は ON 期間長及び OFF 期間長が独立で同一の分布に従う定常過程であるとする．また，ON 期間中の各時点における $W_j(n)$ の増分は 1 とする．次に，それら離散時間 ON-OFF 増分過程を k 個重ね合わせ，大きさを $1/k$ 倍にしたものを $W(n,k)$ とする．さらに， $W(n,k)$ の時間スケールを m 倍に変換したものを $W^{(m)}(n,k)$ (式 (3) 参照) とし，時点 n での増分を $X^{(m)}(n,k)$ とする．ON (OFF) 期間長 U としては分布の裾がベキ関数的に減少するようなクラスを考える．すなわち，

$$\Pr(U > u) \sim cu^{-\alpha} \quad \text{as} \quad u \to \infty, \tag{19}$$

ここで，$1 < \alpha < 2$ であり，c はある定数を表わす．α に関する条件により，$\mathrm{E}(U) < \infty$, $\mathrm{Var}(U) = \infty$ が得られる．このような heavy-tailed 分布の例としては，離散化されたパレートタイプ分布，$\Pr(U > u) = (a/u)^{\alpha}$, $u \geq a > 0$ が挙げられる．

以上の条件の下で k と m を大きくしていくと，$\{X^{(m)}(n,k)\}$ は FGN (Fractional Gaussian Noise) $\{G_n(H,\sigma)\}$ へ次の形で法則収束[7]する．

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{k\to\infty} m^{1-H}k^{\frac{1}{2}}(X^{(m)}(n,k) - \frac{1}{2}) =_D G_n(H,\sigma) \tag{20}$$

ここで，$H = (3-\alpha)/2$ は Hurst パラメータ，$\sigma^2 = \frac{c}{4E(U)\,2(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)}$ は分散パラメータである．この $\{G_n(H,\sigma)\}$ は FBM $\{Z_H(t)\}$ の差分 $G_n(H,\sigma) = \sigma\cdot(Z_H(n) - Z_H(n-1))$ で与えられる．

では，実際のデータではどうなのか．[13] では個々のパケット通信における ON/OFF 期間を，パケットの送出間隔がある時間 (例えば 1 秒) 以内であれば ON 期間，それ以上の場合を OFF 期間として定義し，ON/OFF 期間長の分布について式 (19) の α を求めている．結果は，ON 期間で $\alpha \approx 1.7$，OFF 期間で $\alpha \approx 1.2$ となっており，両者とも分散が発散する領域に入っている．また，多重化トラヒックは自己相似性を示していたと報告されている．

5 おわりに

実世界で観測される振る舞いはどれも複雑であり，待ち行列モデルではその複雑さが直接入力過程のモデル化に入り込んでくる．次回は様々な入力過程が待ち行列に加わった場合の特性について解説される予定である．

参考文献

[1] *Advances in queueing: Theory, methods, and open problems*, edited by J. H. Dshalaow, CRC Press, Boca Raton (1995).

[2] D. R. Cox and V. Isham, *Point processes*, Chapman and Hall, London (1980).

[3] J. R. M. Hosking, Fractional differencing, Biometrika, 68, 1 (1981), 165–176.

[4] 石橋, 小沢, ユーザ単位の階層型 WWW トラヒックモデルの検討, 電子情報通信学会春季大会 (1998).

[7] ここでは有限次元分布の意味での収束を考え，$=_D$ はふたつの確率過程がその意味で等しいことを示す．

[5] 川島, 町原, 高橋, 斎藤, 通信トラヒック理論の基礎とマルチメディア通信網, 電子情報通信学会編 (1995).

[6] D. M. Lucantoni, New results for the single server queue with a batch Markovian arrival process, Stochastic Models, 7 (1991), 1–46.

[7] B. B. Mandelbrot and J. W. V. Ness, Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, SIAM Review 10, 4 (1968), 422–437.

[8] 宮沢政清, 確率と確率過程, 近代科学社 (1993).

[9] 小沢, 町原, 石橋, マルチメディアトラヒック理論の最新動向, 電子情報通信学会誌, 81, 5 (1998), 506–515.

[10] K. Sriram and W. Whitt, Characterizing superposition arrival processes in packet multiplexers for voice and data, IEEE J. on Selected Areas in Communications, SAC-4, 6 (1986), 833–846.

[11] B. Tsybakov and N. D. Geogranas, On self-similar traffic in ATM queues: definitions, overflow probability bound, and cell delay distribution, IEEE/ACM Trans. on Networking, 5, 3 (1997), 397–409.

[12] W. Willinger, M. S. Taqqu, W. E. Leland, and D. V. Wilson, Self-similarity in high-speed packet traffic: analysis and modeling of Ethernet traffic measurements, Statistical Science, 10, 1 (1995), 67–85.

[13] W. Willinger, M. S. Taqqu, R. Sherman, and D. Wilson: Self-similarity through high-variability: statistical analysis of Ethernet LAN traffic at the source level. *IEEE/ACM Trans. on Networking*, **5**(1) (1997), 71–85.