

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

対数は「何乗か」を測るもの

対数・ネイピア数・スケール変換を理解する

1 指数から対数へ：入力と出力を入れ替える

$2^3 = 8$ は「指数 3 から値 8 へ」、 $\log_2 8 = 3$ は「値 8 から指数 3 へ」という対応です。対数の値は整数とは限りません。

M	$1/4$	$1/2$	1	$\sqrt{2}$	2	8
$\log_2 M$	-2	-1	0	$1/2$	1	3

対数の負の値と、負の真数は別

$\log_2(1/2) = -1$ は定義できます。しかし、 $\log_2(-1)$ は実数では定義できません。真数は正でも、対数の値は負・0・正のいずれにもなります。

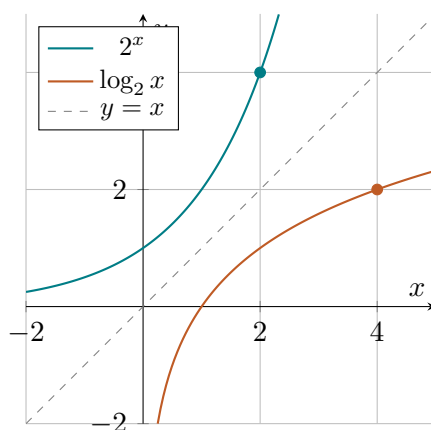


図 1：点 $(2, 4)$ と $(4, 2)$ が対応します。指数関数の定義域 $\mathbb{R}$ と値域 $(0, \infty)$ は、対数関数では逆になります。

底が 1 より小さい場合

$0 < a < 1$ でも対数は定義でき、単調減少します。例えば $\log_{1/2} 4 = -2$ です。 $a = 1$ では $1^x = 1$ から指数を一意に戻せないため、対数の底には使えません。

2 対数法則は、指数法則から導ける

以下では $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$ とします。

積を和にする理由

$p = \log_a M$, $q = \log_a N$ とおくと、 $M = a^p$, $N = a^q$ なので、

$$MN = a^p a^q = a^{p+q}.$$

したがって、両辺を底 a の指数として読み直せば、

$$\boxed{\log_a(MN) = p + q = \log_a M + \log_a N}.$$

同様に $M/N = a^{p-q}$, $M^k = a^{pk}$ より、

$$\log_a(M/N) = \log_a M - \log_a N, \quad \log_a(M^k) = k \log_a M.$$

最後の式は $M > 0$ なら実数 k について成り立ちます。

底の変換公式

$p = \log_a M$ として $M = a^p$ の自然対数を取ると、 $\ln M = p \ln a$ 。よって

$$\boxed{\log_a M = \frac{\ln M}{\ln a}}.$$

例えば $\log_2 10 = \ln 10 / \ln 2 \approx 3.322$ です。 $2^3 < 10 < 2^4$ とも整合します。

和の対数は分解できない

一般に $\log_a(M + N) \neq \log_a M + \log_a N$ です。例えば $M = N = 1$, $a = 2$ なら、左辺は 1、右辺は 0 です。

式変形の前に定義域を確認する

$\ln(x^2) = 2 \ln|x|$ は $x \neq 0$ で成り立ちます。一方、 $2 \ln x$ と書けるのは $x > 0$ の範囲だけです。また、 $\ln\{(x-1)(x-2)\}$ は $x < 1$ でも定義できますが、その範囲で $\ln(x-1) + \ln(x-2)$ とは分解できません。

対数不等式では底を確認する

$a > 1$ なら大小関係を保ち、 $0 < a < 1$ なら逆転します。例えば、

$$\log_2 x > 3 \iff x > 8, \quad \log_{1/2} x > 3 \iff 0 < x < 1/8.$$

3 ネイピア数：細かく分けた成長の極限

元金 1、名目年率 100% を年 n 回に分けて付利する理想化モデルでは、1 回の倍率は $1 + 1/n$ 、1 年後は $(1 + 1/n)^n$ です。

n	1	2	12	365	∞
元利合計	2.0000	2.2500	2.6130	2.7146	2.7183...

回数を増やしても無限大にはならず、有限の値 e へ近づきます。

一般の成長率と時間へ広げる

元本 P 、名目年率 r 、年 n 回付利なら、 t 年後のモデルは

$$P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \rightarrow Pe^{rt}.$$

ここで r は小数で表し、6% なら $r = 0.06$ です。 rt が単位をもたないように、 r と t の時間単位をそろえます。

「年 6%」には、どの方式かの指定が必要

年 1 回複利の年間倍率は 1.06、連続複利の率 0.06 による年間倍率は $e^{0.06} \approx 1.06184$ です。年間倍率をちょうど 1.06 にそろえる連続成長率は $\ln 1.06 \approx 0.05827$ となります。

なぜ連続変化には e が便利なのか【微分との接続】

$Q(t) = Pe^{rt}$ を微分すると、

$$Q'(t) = rPe^{rt} = rQ(t), \quad \frac{Q'(t)}{Q(t)} = r.$$

つまり、 e^{rt} は「その時点の量に比例する速さで変化する」モデルです。 $r > 0$ なら成長、 $r < 0$ なら減衰します。

対数で、必要な時間を求める

$Q(t) = Pe^{rt}$ が初期値の 2 倍になる時間は、 $e^{rt} = 2$ より

$$t = \frac{\ln 2}{r} \quad (r > 0).$$

例えば $r = 0.06$ では約 11.55 年です。離散的に年 1 回だけ観測する場合は、初めて 2 倍以上になる整数年を別に求めます。

ここでの金額計算は、税・手数料・金利変動を含まない数学上のモデルです。

4 対数スケール：同じ倍率を同じ間隔にする

常用対数を取ると、1、10、100、1000 は、それぞれ 0、1、2、3 になります。元の差は異なっても、10 倍になるごとに対数は 1 ずつ増えます。

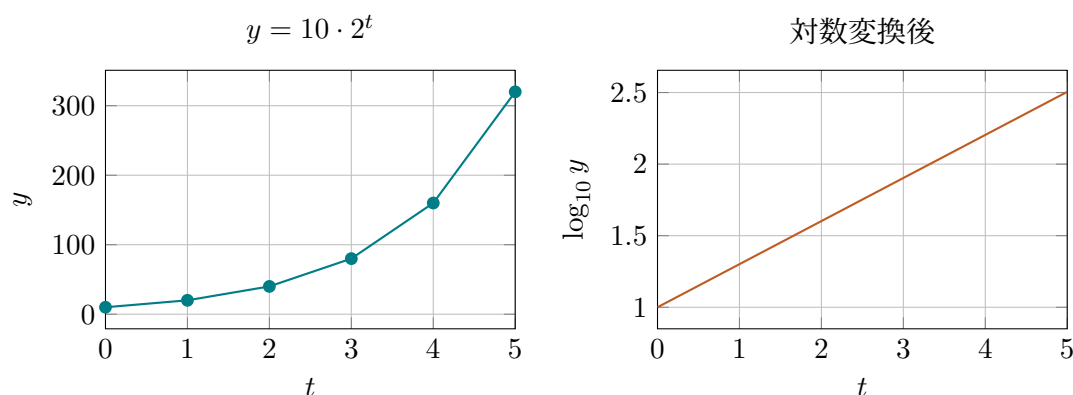


図 2：左は指数的な増加、右は同じ値を対数変換したものです。右の傾きは $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ です。

片対数と両対数を区別する

元のモデル	直線になる関係	条件
$y = Ca^x$	$\ln y = \ln C + x \ln a$	$C, a, y > 0$
$y = Cx^p$	$\ln y = \ln C + p \ln x$	$C, x, y > 0$

指数モデルでは縦だけを対数に、べき乗モデルでは両軸を対数にすると直線になります。どちらも「対数を取れば直線」ですが、横軸が異なります。

対数変換は、誤差の測り方も変える

$\ln y - \ln \hat{y} = \ln(y/\hat{y})$ なので、対数上のずれは倍率に対応します。100 と 110、1000 と 1100 は、差は違っても対数上のずれは同じです。元の値の二乗誤差を最小化することと、対数上の二乗誤差を最小化することは一般に異なります。

小さな確率の積を扱う

$L = (0.01)^{200} = 10^{-400}$ に対し、 $\ln L = -400 \ln 10 \approx -921.034$ です。積を直接計算すると 0 に丸められる数値環境でも、対数の和なら扱いやすくなります。最後に指数へ戻すと、再び表現範囲の問題が生じる場合があります。

5 本文の練習問題：解答と考え方

問 1：真数の範囲を先に調べる

$F(x) = \log_2\{(x-1)(5-x)\}$ の真数は

$$(x-1)(5-x) = 4 - (x-3)^2.$$

したがって、定義域は $4 - (x-3)^2 > 0$ より $\boxed{1 < x < 5}$ です。 $F(x) = 1$ は $4 - (x-3)^2 = 2$ と同値なので、

$$\boxed{x = 3 \pm \sqrt{2}}.$$

いずれも定義域に入ります。真数の範囲は $(0, 4]$ 、底 2 の対数は増加関数なので値域は $(-\infty, 2]$ 。よって $F(x) = c$ が実数解をもつ条件は $\boxed{c \leq 2}$ です。 $c < 2$ で 2 解、 $c = 2$ で 1 解です。

問 2：将来価値と現在価値

金額を万円で表すと、8 年後は

$$\text{年 1 回： } 50(1.06)^8 \approx 79.6924, \quad \text{連続： } 50e^{0.06 \cdot 8} \approx 80.8037.$$

$r > 0$ について $e^r > 1 + r$ なので、 $e^{8r} > (1+r)^8$ です。例えば微分を使うと、 $g(r) = e^r - 1 - r$ は $g(0) = 0$ 、 $r > 0$ で $g'(r) = e^r - 1 > 0$ から、この不等式を確認できます。

現在価値を P とすると $Pe^{0.48} = 80$ なので、

$$\boxed{P = 80e^{-0.48} \approx 49.5027 \text{万円}}.$$

問 3：対数で表した比を足し合わせる

$L_{A/B} = 30$ なら $A/B = 10^3$ 、 $L_{B/C} = 10$ なら $B/C = 10$ 。よって

$$\boxed{A/C = (A/B)(B/C) = 10^4 = 10000}.$$

15dB なら $10\log_{10}(A/B) = 15$ より、 $\boxed{A/B = 10^{1.5} \approx 31.62}$ です。また、

$$L_{A/C} = 10\log_{10}\left(\frac{A}{B} \frac{B}{C}\right) = L_{A/B} + L_{B/C}.$$

足しているのは「つながる比」の対数

この問題では A/B と B/C を掛け合わせています。量 $A+B$ の対数を、 A と B の対数の和にできるという意味ではありません。ここでは問題文の $10\log_{10}(X/Y)$ という定義を用いています。

6 追加問題：理解を確かめる

問 1 $\log_3(1/27)$ 、 $\log_4 2$ 、 $\ln(e^{-2})$ を求めよ。

問 2 $\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln 4$ を、定義域を確認して解け。

問 3 $\log_{1/2} x \leq -2$ を解け。

問 4 $y = 5 \cdot 3^t$ について、 $\ln y$ を t の式で表し、 $y = 100$ となる t を求めよ。

問 5 $Q(t) = 200e^{-0.2t}$ の半減期を求めよ。

問 6 正の量の比が 100 倍から 1000 倍へ変わると、本文の定義によるデシベル値はどれだけ増えるか。

問 7 「 $\ln(x^2) = 2 \ln x$ は、すべての $x \neq 0$ で成り立つ」という説明の誤りを訂正せよ。

解答・解説

- $3^{-3} = 1/27$ 、 $4^{1/2} = 2$ より $\boxed{-3, 1/2, -2}$ 。
- 定義域は $x > 2$ 。積の法則より $(x-2)(x+1) = 4$ 、すなわち $x^2 - x - 6 = 0$ 。候補 $x = 3, -2$ のうち、定義域に入る $\boxed{x = 3}$ だけが解。
- 底が 1 未満なので不等号の向きが逆転し、 $\boxed{x \geq 4}$ 。
- $\boxed{\ln y = \ln 5 + t \ln 3}$ 。 $3^t = 20$ より $\boxed{t = \ln 20 / \ln 3 \approx 2.727}$ 。
- $e^{-0.2t} = 1/2$ より $\boxed{t = \ln 2 / 0.2 \approx 3.466}$ 。時間単位は t の定義に従う。
- $10 \log_{10} 100 = 20$ 、 $10 \log_{10} 1000 = 30$ なので、 $\boxed{10\text{dB}}$ 増える。
- 右辺の $\ln x$ は $x < 0$ で実数として定義されない。 $x \neq 0$ で成り立つ形は $\boxed{\ln(x^2) = 2 \ln |x|}$ 。

講義で押さえる 4 点

対数は指数を求める操作。真数の条件を式変形より先に確認する。積・商・累乗の法則を使い分ける。 e^{rt} の r は連続成長率であり、年間増加率 $e^r - 1$ とは区別する。