

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

数の並びを「規則」で表す

数列・一般項・階差・漸化式をつなぐ

1 数列は「番号を入力する関数」

ここでは $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ とします。数列では、**入力**は項の番号 n 、**出力**は項の値 a_n です。例えば $a_n = 2n - 1$ なら、入力 1, 2, 3, 4 に対して出力は 1, 3, 5, 7 となります。 a_n は「 a と n の積」ではありません。

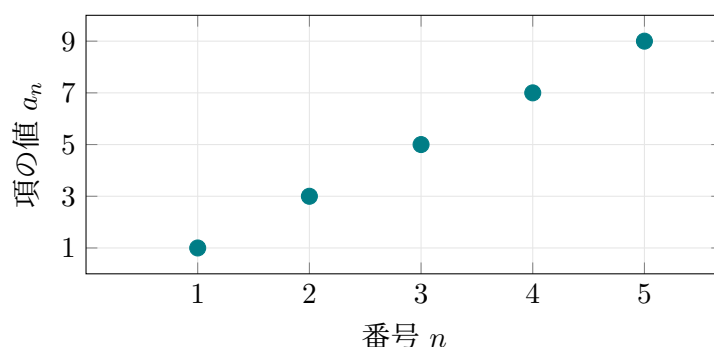


図 1：数列のグラフは離散的な点。第 2.5 項は、この定義にはありません。

数列と集合は違う

数列 $(1, 2, 1, 2, \dots)$ では、順番と繰り返しが重要です。一方、値の集合 $\{1, 2\}$ だけでは、何番目がどちらなのか分かりません。また、実際の 5 日分の売上のような有限個の並びは、定義域を $\{1, \dots, 5\}$ とする**有限数列**として扱えます。

初項の添字が 0 か 1 かを確認する

「開始時点の値が 100 で、1 期間ごとに 5 増える」場合、

$$a_1 = 100 \text{ なら } a_n = 100 + 5(n - 1), \quad b_0 = 100 \text{ なら } b_n = 100 + 5n.$$

同じ変化でも添字の付け方で式が変わります。両者は $b_n = a_{n+1}$ の関係です。

確認：項と番号を区別しよう

$a_n = 3n + 2$ なら $a_4 = 14$ です。逆に「 $a_n = 20$ となる番号」は $3n + 2 = 20$ を解いて $n = 6$ です。 $a_{n+1} = 3(n + 1) + 2$ と $a_n + 1 = 3n + 3$ も異なります。

2 一定の「差」と一定の「倍率」

初項から第 n 項までは、更新を $n - 1$ 回行います。これが一般項に $n - 1$ が現れる理由です。

	等差数列	等比数列
更新	$a_{n+1} = a_n + d$	$a_{n+1} = r a_n$
第 2 項	$a + d$	ar
第 3 項	$a + 2d$	ar^2
第 n 項	$a + (n - 1)d$	ar^{n-1}

例：毎回 2 増える場合と、毎回 2 倍になる場合

初項をともに 2 として、 $a_n = 2 + 2(n - 1) = 2n$ 、 $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ を比べます。第 2 項までは一致しますが、その後は差が広がります。

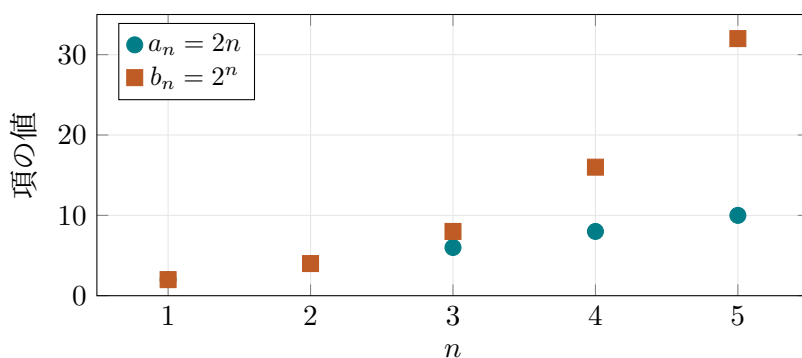


図 2：等比数列では、同じ倍率でも増加量は変わります。

「10 増える」と「10% 増える」は別

100 から始めると、毎回 10 増える並びは 100, 110, 120, ...。毎回 10% 増える並びは 100, 110, 121, ... で、公比は 1.10 です。10% 減る場合の公比は 0.90 です。

等比数列は増加するとは限らない

初項が正の場合、 $0 < r < 1$ なら減少し、 $r < 0$ なら符号が交互に変わります。例えば 2, -4, 8, -16, ... の公比は -2 です。項が 0 だと比を計算できないので、本文の比による定義では零の項を除いています。

3 階差から一般項を組み立てる

階差 $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ は、「第 n 項から第 $n+1$ 項への増加量」です。一般項を探すときは、まずこの増加量の規則を調べます。

n	1	2	3	4	5
a_n	3	7	13	21	31
Δa_n	4	6	8	10	未観測
$\Delta a_{n+1} - \Delta a_n$	2	2	2		

「増加量が 2 ずつ増える」と仮定してみる

すべての $n \geq 1$ で $\Delta a_n = 2n + 2$ が成り立つと仮定すると、第 n 項は「初項+それまでの増加量の合計」です。

$$\begin{aligned}
 a_n &= 3 + \sum_{j=1}^{n-1} (2j + 2) \\
 &= 3 + 2 \frac{(n-1)n}{2} + 2(n-1) \\
 &= n^2 + n + 1.
 \end{aligned}$$

ここで $1 + 2 + \cdots + m = m(m+1)/2$ を用いました。 $n = 1$ では増加量の合計を 0 とします。

階差が等差数列になる場合

$\Delta a_n = d + (n-1)c$ なら、

$$a_n = a_1 + (n-1)d + \frac{c(n-1)(n-2)}{2}.$$

$c \neq 0$ なら n の 2 次式、 $c = 0$ なら 1 次以下の式です。逆に、 $a_n = An^2 + Bn + C$ なら、 $\Delta a_n = 2An + A + B$ となります。

有限個の項だけでは、その先は決まらない

上の 5 項は $n^2 + n + 1$ に合います。しかし、

$$\tilde{a}_n = n^2 + n + 1 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

も最初の 5 項は同じです。第 6 項では前者が 43、後者が 163 になります。

規則の発見と証明を分ける

数個の項との一致は、一般項の候補を見つける手がかりです。一般項を確定するには、「階差の法則がすべての n で成り立つ」など、数列全体を指定する条件が必要です。

4 漸化式を「次の項の作り方」と読む

一般項が番号 n から項を直接求める式であるのに対し、**漸化式**は前の項などから次の項を作る式です。通常は、漸化式だけでなく初期条件も必要です。

例： $a_{n+1} = 2a_n + 1, a_1 = 1$

まず順に計算すると、 $1, 3, 7, 15, 31, \dots$ です。「2 倍した後に 1 を足す」ので、このままでは等比数列ではありません。両辺に 1 を足すと、

$$a_{n+1} + 1 = 2a_n + 2 = 2(a_n + 1).$$

ここで $b_n = a_n + 1$ とおけば、

$$b_{n+1} = 2b_n, \quad b_1 = 2.$$

よって $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ 、したがって

$$a_n = 2^n - 1$$

です。足した 1 は、最後に引いて元の数列に戻します。

n	1	2	3	4	5
a_n	1	3	7	15	31
$b_n = a_n + 1$	2	4	8	16	32

なぜ「1 を足す」と気づけるのか【発展】

更新しても変わらない値 s を探すと、 $s = 2s + 1$ より $s = -1$ です。この値からのずれ $a_n - s = a_n + 1$ を取ると、加算の部分が消えます。一般に

$$a_{n+1} = ra_n + c, \quad r \neq 1, \quad s = \frac{c}{1-r}$$

なら $a_{n+1} - s = r(a_n - s)$ です。 $r \neq 0, 1$ では、

$$a_n = s + (a_1 - s)r^{n-1}.$$

$r = 1$ なら等差数列、 $r = 0$ なら第 2 項以降は c です。

得られた一般項は 2 か所で検算

初期条件： $2^1 - 1 = 1$ 。

更新則： $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$ 。

両方を満たすので、初項から順に決まる数列を正しく表しています。最初の数項だけの一致よりも強い確認です。

5 本文の練習問題：解答と考え方

問 1：等差数列と等比数列

(1) 初項 3、公差 4 なので、最初の 5 項は

$$3, 7, 11, 15, 19, \quad a_n = 3 + 4(n-1) = \boxed{4n-1}.$$

(2) 初項 2、公比 3 なので、最初の 5 項は

$$2, 6, 18, 54, 162, \quad a_n = \boxed{2 \cdot 3^{n-1}}.$$

いずれも $n=1$ を代入して初項に戻るか確かめます。

問 2：階差から一般項を読む

(1) 階差は $4, 6, 8, 10, \dots$ です。

(2) $a_n = n^2 + n + 1$ に $n = 1, \dots, 5$ を代入すると、与えられた 5 項と一致します。また

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + (n+1) + 1 - (n^2 + n + 1) = 2n + 2$$

となり、想定された階差の規則とも一致します。この規則が続くという条件のもとで一般項が定まります。

(3) $a_{10} = 10^2 + 10 + 1 = \boxed{111}$ です。

問 3：漸化式から一般項を求める

(1) $a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ 、 $a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ 、 $a_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$ 。

(2) $b_{n+1} = a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1) = \boxed{2b_n}$ 、初項は $b_1 = 2$ 。

(3) $b_n = 2^n$ より、 $a_n = b_n - 1 = \boxed{2^n - 1}$ 。

添字の読み取り：小さな表で確認

x_{ij} を「第 i 店舗の第 j 日の売上」と定めます。

	第 1 日	第 2 日	第 3 日
第 1 店舗	10	12	15
第 2 店舗	8	11	9

$x_{23} = 9$ 、 $x_{12} = 12$ です。 $x_{2,j+1} - x_{2j}$ は第 2 店舗の前日からの増加量を表し、 $j=1$ なら $11 - 8 = 3$ です。添字の意味は問題ごとに定め、勝手に入れ替えないようにします。

6 追加問題：規則を選び、検算する

A：項の番号を逆算する

$a_n = 7 + 3(n - 1)$ とします。(1) 第 8 項を求めよ。(2) 初めて 50 以上になる項の番号を求めよ。

B：一定割合で減る数量

第 1 日の量が 80 で、翌日には前日の 75% が残るとします。(1) 一般項を求めよ。(2) 第 4 日の量を求めよ。(3) 「毎日 25 ずつ減る」との違いを説明せよ。

C：階差の法則が与えられた場合

$a_1 = 2$ 、すべての $n \geq 1$ で $a_{n+1} - a_n = 3n$ とします。一般項を求め、第 4 項を検算せよ。

D：平行移動で等比数列に直す

$a_{n+1} = 3a_n - 4$, $a_1 = 5$ とします。 $b_n = a_n - 2$ とおいて一般項を求めよ。

解答・解説

A：(1) $a_8 = 7 + 3 \cdot 7 = \boxed{28}$ 。

(2) $7 + 3(n - 1) \geq 50$ より $n \geq 46/3$ 。 n は自然数なので**第 16 項**です。実際に $a_{15} = 49 < 50$ 、 $a_{16} = 52 \geq 50$ です。

B：(1) $a_n = \boxed{80(3/4)^{n-1}}$ 。

(2) $a_4 = 80 \cdot 27/64 = \boxed{33.75}$ 。

(3) このモデルでは減少量は毎日前日の 25% であり、20, 15, 11.25, ... と変わります。毎日 25 ずつ減る場合の一定量の減少とは異なります。

C：

$$a_n = 2 + \sum_{j=1}^{n-1} 3j = \boxed{2 + \frac{3}{2}n(n-1)}.$$

第 4 項は $2 + 18 = 20$ 。更新で求めても 2, 5, 11, 20 となります。

D： $b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2) = 3b_n$ 、 $b_1 = 3$ 。よって $b_n = 3^n$ 、 $a_n = \boxed{3^n + 2}$ です。 $n = 1$ で 5 になり、 $3(3^n + 2) - 4 = 3^{n+1} + 2$ も確認できます。

実データに使うときの問い

差や倍率は本当に一定か、規則はどの期間に成り立つか、添字は「観測番号」か「経過時間」かを確認します。一般項による将来の値は、その規則が続くと仮定した**モデル上の予測**です。