

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

総和と総乗を「展開して読む」

記号の読み方・計算の工夫・データ分析への応用

1 開始値・終了値・対象の式を確認する

Σ と Π は、同じ形の計算を何度か行うための記号です。まず添字に値を順番に代入し、最後に足すか掛けるかを決めれば、複雑な式も読めるようになります。

$$\sum_{k=2}^5 (2k-1) = 3 + 5 + 7 + 9 = 24, \quad \prod_{k=2}^5 (2k-1) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 945.$$

添字 k	2	3	4	5
対象の式 $2k-1$	3	5	7	9

項数は「終了値－開始値＋1」

整数 $m \leq n$ について、 $\sum_{k=m}^n a_k$ には $n - m + 1$ 項あります。開始値も終了値も含むためです。上の例は $5 - 2 + 1 = 4$ 項です。

添字は、その計算の中だけで使う番号

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{k=1}^n x_k$$

のように、添字の文字をそろえて変更しても値は変わりません。ただし、すでに別の役割で使っている文字との混同は避けます。 n はここでは項数を指定する数であり、動かす添字ではありません。

添字をずらすときは、範囲と式を両方変える

$j = k - 1$ とおくと、 $k = 2, \dots, 5$ は $j = 1, \dots, 4$ になるので、

$$\sum_{k=2}^5 (2k-1) = \sum_{j=1}^4 (2j+1).$$

どちらも $3 + 5 + 7 + 9$ です。範囲だけを変えると別の和になります。

定数だけを足す・掛ける場合

$$\sum_{i=1}^n c = nc, \quad \prod_{i=1}^n c = c^n \quad (n \geq 1).$$

対象となる項がない場合には、**空和を 0**、**空積を 1** と定めます。これは、それぞれ加算・乗算の結果を変えない値です。

2 線形性と、間違えやすい式の違い

総和では、足し算と定数倍を分けられる

$$\sum_{i=1}^n (3x_i + 2) = 3 \sum_{i=1}^n x_i + 2n.$$

最後の項は 2 ではなく $2n$ です。例えば $x = (1, 2, 3)$ なら、左辺は $5 + 8 + 11 = 24$ 、右辺は $3(1 + 2 + 3) + 2 \cdot 3 = 24$ となります。

総乗では、定数は項数だけ掛かる

$$\prod_{i=1}^n (ca_i) = c^n \prod_{i=1}^n a_i, \quad \prod_{i=1}^n (a_i b_i) = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \left(\prod_{i=1}^n b_i \right).$$

総乗に総和と同じ線形性はありません。例えば $(1 + 3)(2 + 4) = 24$ ですが、 $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 14$ です。

「2 乗してから足す」と「足してから 2 乗」

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ の場合、

$$\sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1 + 4 + 9 = 14, \quad \left(\sum_{i=1}^3 x_i \right)^2 = (1 + 2 + 3)^2 = 36.$$

一般に、後者には交差項も含まれます。

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

「同じ番号どうしの積の和」と「和どうしの積」

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 a_i b_i &= a_1 b_1 + a_2 b_2, \\ \left(\sum_{i=1}^2 a_i \right) \left(\sum_{j=1}^2 b_j \right) &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2. \end{aligned}$$

前者は同じ番号だけ、後者はすべての組合せを含みます。

対数を使うと、積が和に変わる

各 $a_i > 0$ なら、 $\log(\prod_{i=1}^n a_i) = \sum_{i=1}^n \log a_i$ です。例えば $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ より、 $\log 30 = \log 2 + \log 3 + \log 5$ となります。ここで $\log$ は自然対数です。

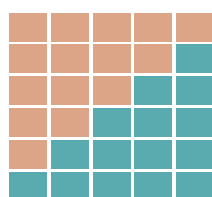
3 数列の和の公式を、仕組みから理解する

等差数列：逆順に並べて足す

$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を逆順にもう一度書くと、同じ位置の和はすべて $a_1 + a_n$ になります。

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ S &= a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 \end{aligned}$$

よって $2S = n(a_1 + a_n)$ 、すなわち $S = n(a_1 + a_n)/2$ です。 n が奇数でも、この方法はそのまま使えます。



縦 6 個、横 5 列で 30 個
青緑も橙も $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ 個
 $2S = 5 \cdot 6$ より $S = 15$

図 1：階段状の並びを 2 つ組み合わせると長方形になります。

等比数列：公比を掛けた式との差を取る

$$S = a + ar + \cdots + ar^{n-1}, \quad rS = ar + ar^2 + \cdots + ar^n.$$

重なる項を引き算で消すと $(1-r)S = a - ar^n$ です。したがって、

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1).$$

$r = 1$ ならすべての項が a なので $S = na$ です。例えば $3 + 6 + 12 + 24 = 3(1 - 2^4)/(1 - 2) = 45$ です。

一定倍率の積と、積立額の和を区別する

毎年 2% 増える量の 3 年後の倍率は $\prod_{k=1}^3 1.02 = 1.02^3$ です。一方、各年末に 100 を 3 回追加し、追加済みの量が年 2% 増えるとする、3 回目の追加直後の合計は

$$100(1.02)^2 + 100(1.02) + 100 = 306.04.$$

追加する時点によって、各項の指数が変わります。

4 二重総和は、表のどこを足すかを表す

次の 2×3 の表を考えます。 a_{ij} の i は行、 j は列を表します。

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	
$i = 1$	2	4	6	→ 行の和：12
$i = 2$	1	3	5	→ 行の和：9
	↓	↓	↓	
列の和	3	7	11	

図 2：行ごとに足しても、列ごとに足しても、全体の和は 21 です。

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} = 12 + 9 = 21, \quad \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 a_{ij} = 3 + 7 + 11 = 21.$$

内側の和では外側の添字を固定します。例えば $i = 2$ なら、 $\sum_{j=1}^3 a_{2j} = 1 + 3 + 5 = 9$ です。

平均なら「何個を平均するか」も確認する

n 個のデータそれぞれに m 個の出力があるなら、誤差の 2 乗は nm 個あります。各成分を同じ重みで平均する平均二乗誤差は

$$\text{MSE} = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\hat{y}_{ij} - y_{ij})^2.$$

分母を n だけにすると、「1 データあたりの出力全体の二乗誤差和の平均」であり、上の値の m 倍です。

範囲が連動する場合は、入れ替え方に注意【発展】

$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i a_{ij}$ は表全体ではなく、 $j \leq i$ の部分だけを足します。含まれる項は

$$a_{11} + a_{21} + a_{22} + a_{31} + a_{32} + a_{33}.$$

順序を変えるなら、同じ範囲を保って $\sum_{j=1}^3 \sum_{i=j}^3 a_{ij}$ とします。

5 本文の練習問題：解答と解説

問 1：総和、平均、分散

合計は $\sum_{i=1}^5 x_i = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$ 、平均は $\bar{x} = 30/5 = 6$ です。

i	1	2	3	4	5	合計
x_i	2	4	6	8	10	30
$x_i - \bar{x}$	-4	-2	0	2	4	0
$(x_i - \bar{x})^2$	16	4	0	4	16	40

したがって $s^2 = 40/5 = \boxed{8}$ です。偏差の和は必ず 0 ですが、偏差の 2 乗和は一般に 0 ではありません。分散は元の量の単位の 2 乗をもちます。

問 2：二重総和と平均二乗誤差

(1) まず i を固定し、 $j = 1, 2, 3, 4$ を代入します。

$(2i - j)^2$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	行の和
$i = 1$	1	0	1	4	6
$i = 2$	9	4	1	0	14
$i = 3$	25	16	9	4	54

よって総和は $6 + 14 + 54 = \boxed{74}$ です。

(2) 予測値を代入すれば、

$$E(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2.$$

(3) 全データ・全出力の各成分を均等に平均すると、

$$\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\hat{y}_{ij} - y_{ij})^2.$$

問 3：総乗記号の展開

(1) $\prod_{k=1}^4 k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = \boxed{24}$ 。これは $4!$ と書きます。

(2) $\prod_{k=1}^3 (1 + k) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = \boxed{24}$ 。

(3) $\prod_{k=1}^3 (1 + 0.02) = 1.02^3 = \boxed{1.061208}$ 倍。全体では約 6.12% の増加であり、ちょうど 6% ではありません。

6 追加問題と解答：式の意味を確かめる

A：展開と線形性

$\sum_{k=2}^5 (3k-1)$ を求めよ。また、 $\sum_{i=1}^4 x_i = 10$ のとき、 $\sum_{i=1}^4 (2x_i + 3)$ を求めよ。

B：和の公式

(1) $\sum_{k=1}^{20} (2k-1)$ 、(2) $\sum_{k=0}^4 3 \cdot 2^k$ を求めよ。

C：相殺する和と積

(1) $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ 、(2) $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$ を求めよ。ただし $n \geq 1$ とする。

D：変化率と分散

- (1) ある量が 10% 増え、次に 10% 減った。最初の何倍か。
 (2) $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$ を示せ。
 (3) $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$ を導け。

解答・解説

A： $5 + 8 + 11 + 14 = \boxed{38}$ 。また $2 \cdot 10 + 3 \cdot 4 = \boxed{32}$ 。

B： (1) 初項 1、末項 39、20 項なので $20(1+39)/2 = \boxed{400}$ 。
 (2) $k=0$ から 4 までの **5 項**なので、 $3(2^5-1)/(2-1) = \boxed{93}$ 。

C： (1) 中間の項が打ち消し合うので、

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \boxed{1 - \frac{1}{n+1}}.$$

(2) $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = \boxed{n+1}$ 。分子と次の分母が約分されます。

D： (1) $1.1 \cdot 0.9 = \boxed{0.99}$ 倍。差し引き 1% 減です。

(2) $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x} = 0$ 。

(3) 2 乗を展開し、 $\sum x_i = n\bar{x}$ を使うと、

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 \right) \\ &= \boxed{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2}. \end{aligned}$$

検算：本文のデータでは $\sum x_i^2 = 220$ 。 $220/5 - 6^2 = 8$ で一致します。