

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

複利計算と割引現在価値

時間軸と等比数列から公式を理解する

1 複利は「残高全体に同じ倍率を掛ける」

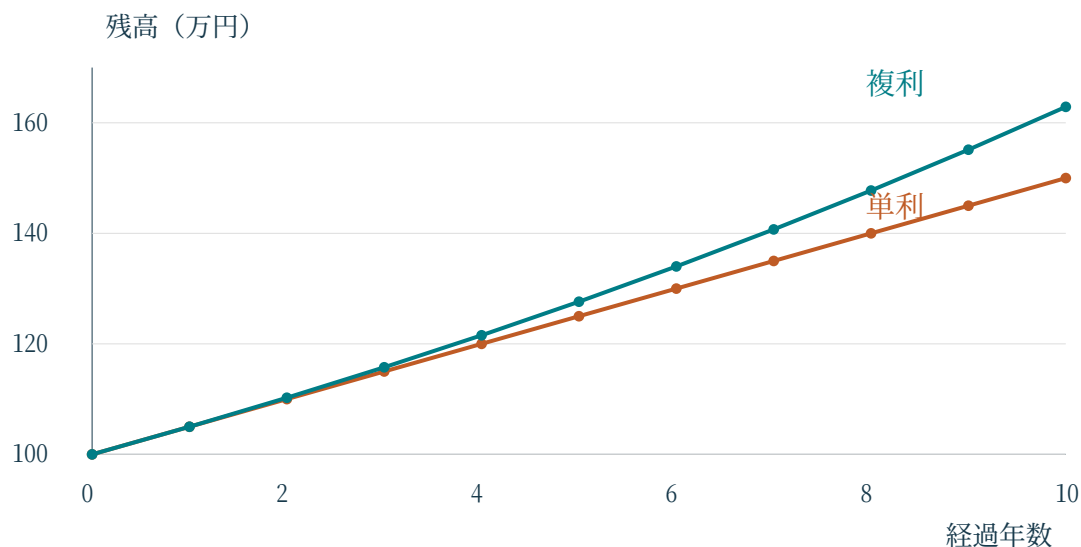
元本を $A_0 = PV$ 、1期あたりの利率を r とします。追加の入出金がなければ、残高は「前期の残高 + その利息」で決まります。

$$A(t+1) = (1+r) A(t)$$

同じ倍率を n 回掛けるため、 n 期後の残高は $PV(1+r)^n$ です。時刻0が出発点なので、指数は $n-1$ ではなく n になります。

単利と複利の違い

単利では最初の元本にだけ利息を付けます。100万円、年5%の場合、単利は $100(1+0.05n)$ 、複利は $100(1.05)^n$ です。



10年後は、単利150万円に対して複利は約162.8895万円です。複利では、過去に付いた利息も次の期の利息を生むため、差が広がります。点は各年末の残高、線は見やすく結んだものです。

このノートでは、利率は与えられた値とし、税・手数料を含めません。特に断らなければ金額は万円、入出金は期末です。

2 現在価値と将来価値：比較する時点をそろえる

ここからは数列を資金の時間変化に用います。以下の計算は、一定の 1 期あたりの利率 r 、各期末の入出金、税・手数料なしというモデルです。金額は特に断らなければ万円単位とします。

1 回の入金：未来へ進むと掛け算、現在へ戻ると割り算

100 を 1 期あたり 5% で運用するなら、各期末の残高は 100, 105, 110.25, 115.7625, ... となります。

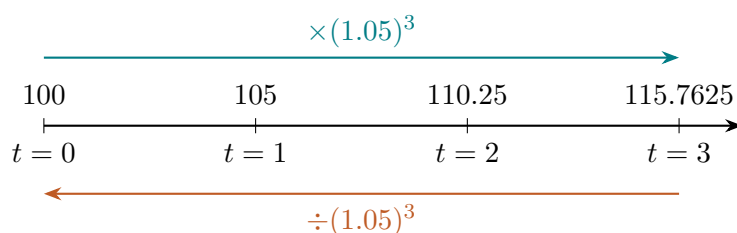


図 3：将来価値と現在価値は、同じ金額を別の時点で表したものです。

一般には $FV = PV(1+r)^n$ 、 $PV = FV(1+r)^{-n}$ です。 $r > 0$ なら、同じ将来の受取額でも、受け取りが遅いほど現在価値は小さくなります。

複数の入出金：時点ごとに割り引いて足す

t 期末の受取額を C_t とすると、 $t = 0$ 時点の現在価値は

$$PV = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+r)^t}.$$

3 年後 30 万円、5 年後 50 万円、割引率年 2% なら、

$$PV = \frac{30}{1.02^3} + \frac{50}{1.02^5} \approx 73.5562 \text{ 万円}.$$

異なる時点の金額を、そのまま足して 80 万円とすることとは区別します。

利率と期間の単位を合わせる

年利で計算するなら n は年数、月利なら n は月数です。実効年利 r_a に対応する月利は $(1+r_a)^{1/12} - 1$ です。「年率を 12 で割る」のは、月次複利の名目年率として与えられた場合など、その定義が指定されているときに使います。

補足：期ごとに利率 r_t が変わる場合の将来価値は $PV \prod_{t=1}^n (1+r_t)$ です。一定利率なら、この積が $(1+r)^n$ になります。

3 積立と定期受取：等比数列の和から導く

期末積立：早く入れた分ほど長く増える

毎期末に C を積み立て、第 n 期末の**最後の入金直後**を評価時点とします。第 t 期末の入金は $n - t$ 期間運用されます。

入金時点	運用期間	第 n 期末での価値
第 1 期末	$n - 1$	$C(1 + r)^{n-1}$
第 2 期末	$n - 2$	$C(1 + r)^{n-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
第 n 期末	0	C

よって、順序を逆にして等比数列の和を使うと、

$$FV = \sum_{t=1}^n C(1+r)^{n-t} = C \sum_{j=0}^{n-1} (1+r)^j = \boxed{C \frac{(1+r)^n - 1}{r}}.$$

例として、毎年末 10 万円を年 5% で 3 回積み立てると、 $FV = 10(1.05)^2 + 10(1.05) + 10 = 31.525$ 万円です。

定期受取：各回を現在へ戻す

各期末に C を n 回受け取る場合、初回も 1 期間分割り引きます。

$$\begin{aligned} PV &= \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^n} \\ &= \boxed{C \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}}. \end{aligned}$$

この公式でいう「年金」は、定期的な受取を表す数学用語であり、毎月の受取にも使えます。 $PV(1+r)^n = FV$ も成り立ちます。

期首払いは、期末払いより 1 期間早い

$t = 0, 1, \dots, n-1$ に入出金する**期首払い**なら、 $t = n$ での将来価値も $t = 0$ での現在価値も、対応する期末払いの値の $(1+r)$ 倍です。 $r = 0$ なら、どちらも単純な合計 nC になります。

確認：3 年間の期首積立では、 $t = 0, 1, 2$ に入金し、 $t = 3$ で評価します。最後の入金にも 1 期間分の増加が付きます。

4 ローン返済：残高の漸化式から理解する

借入額を $B_0 = PV$ 、第 t 期末の返済直後の残高を B_t 、每期返済額を A とします。「利息を加えてから返済する」ので、

$$B_t = (1+r)B_{t-1} - A.$$

2 回目まで展開すると $B_2 = (1+r)^2 PV - A\{(1+r) + 1\}$ です。同じ計算を繰り返すと、

$$B_n = (1+r)^n PV - A \sum_{j=0}^{n-1} (1+r)^j.$$

完済条件 $B_n = 0$ と等比数列の和から、

$$A = PV \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = PV \frac{r}{1 - (1+r)^{-n}}.$$

また、将来の返済額の現在価値の合計が借入額に等しいとして、 $PV = \sum_{t=1}^n A/(1+r)^t$ から導けます。

例：100 万円、年 4%、5 回の年末返済

正確な式で求めると $A \approx 22.462711$ 万円です。

年	年初残高	利息	元金返済分	返済後残高
1	100.000	4.000	18.463	81.537
2	81.537	3.261	19.201	62.336
3	62.336	2.493	19.969	42.367
4	42.367	1.695	20.768	21.599
5	21.599	0.864	21.599	0.000

表：単位は万円。未丸めの値で計算し、表示だけ小数第 3 位に丸めています。

毎回の返済額は一定でも、残高が減るにつれて利息は減り、元金返済分は増えます。総返済額は約 112.3136 万円、利息の合計は約 12.3136 万円です。

返済額から借入額を逆算する

毎月 5 万円、月利 0.005、24 回なら、

$$PV = 5 \frac{1 - (1.005)^{-24}}{0.005} \approx 112.8143 \text{ 万円}.$$

数学モデル上では約 112.8 万円に対応します。実際の借入可否をこの式だけで判定するものではありません。

5 本文の練習問題の解説と確認問題

本文・問 1：正味現在価値（NPV）

現在の支出を負、将来の純収入を正として、すべて $t = 0$ の価値にそろえます。

$$\begin{aligned} NPV &= -100 + \frac{40}{1.05} + \frac{50}{1.05^2} + \frac{60}{1.05^3} \\ &\approx -100 + 38.0952 + 45.3515 + 51.8303 \\ &= \boxed{35.2770 \text{ 万円}}. \end{aligned}$$

$NPV > 0$ なので、与えられた収入予測・割引率と NPV 基準のもとでは採択と判断します。これは収入の確実性や現実の投資成果を保証するものではありません。

本文・問 2：必要積立額

$150 = C\{(1.03)^{10} - 1\}/0.03$ より、

$$C = \frac{150 \cdot 0.03}{(1.03)^{10} - 1} \approx \boxed{13.0846 \text{ 万円/年}}.$$

問題の近似値 1.344 を使えば、 $C \approx 13.0814$ 万円です。円単位で目標額以上を確保するなら、未丸めの式から計算して年 130,846 円とします。

本文・問 3：毎年の返済額

$$PMT = 100 \frac{0.04}{1 - (1.04)^{-5}} \approx \boxed{22.4627 \text{ 万円/年}}.$$

問題の近似値 0.822 では $PMT \approx 4/0.178 \approx 22.4719$ 万円です。差は途中の丸めによるものです。

追加問題：入出金の時点を確認しよう

A：毎年末 10 万円を年 5% で 3 回積み立てる場合と、毎年初めに 3 回積み立てる場合について、3 年後の残高を比較せよ。

B：利率 0 で、60 万円を 12 回の同額返済で完済するとき、1 回の返済額を求めよ。

C：2 年後に 121 万円を受け取る。割引率年 10% と年 5% で現在価値を求め、比較せよ。

追加問題の解答

A：期末は 31.525 万円、期首は $31.525 \cdot 1.05 = 33.10125$ 万円。期首積立は各入金の運用期間が 1 年長くなります。

B： $60/12 = 5$ 万円。 $r = 0$ を分母 r の公式に直接代入せず、利息のない場合として計算します。

C： $121/1.1^2 = 100$ 万円、 $121/1.05^2 \approx 109.7506$ 万円。将来の受取額が同じなら、割引率が高いほど現在価値は小さくなります。

6 追加問題：時点・利率・判断を確かめる

A：月次複利の名目年率が12%で、月利を $0.12 \div 12$ とする。100万円を1年間運用した将来価値と、実効年利を求めよ。

B：2年後に110万円を受け取るために、現在100万円を支払う。割引率年5%でNPVを求め、符号の意味を説明せよ。

C：毎年末10万円を3回積み立て、年利5%で運用する。3年後の残高は、なぜ $10(1.05)^3 + 10(1.05)^2 + 10(1.05)$ ではないのか。

D：60万円を利率0で12回の同額返済により完済する。1回の返済額を求めよ。

解答と考え方

A：月利は1%、期間は12か月です。将来価値は $100(1.01)^{12} \approx 112.6825$ 万円。実効年利は $(1.01)^{12} - 1 \approx 0.126825$ 、すなわち約12.6825%です。名目年率12%と実効年利を区別します。

B： $NPV = -100 + 110 \div (1.05)^2 \approx -0.2268$ 万円。受取額が元本を上回っていても、割引率5%で評価するとNPVは負です。与えられたモデルのNPV基準では採択しません。

C：期末積立の初回は1年後なので、運用期間は2年、1年、0年です。正しくは $10(1.05)^2 + 10(1.05) + 10 = 31.525$ 万円。問題の式は、時刻0、1、2に入金する期首積立の式です。

D： $60 \div 12 = 5$ 万円です。分母に r がある公式へ $r=0$ を直接代入せず、利息がない場合として計算します。

計算前に確認すること

①評価時点 ②初回と最終回の入出金時点 ③利率と期間の単位 ④金額の単位。途中では丸めず、最後に必要な桁へ丸めます。