

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

極限の概念：値の収束の取り扱い

誤差・振動・部分和から理解する

1 収束とは「十分先のすべて」が近いこと

$a_n \rightarrow \alpha$ という主張は、単に「近い項が何度も現れる」という意味ではありません。指定された誤差幅の中に、ある番号より先のすべての項が入り続けるという意味です。

定義を 3 段階で読む

1. 読み手が、任意の小さい許容誤差 $\varepsilon > 0$ を指定する。
2. その ε に応じて、境目の番号 N を選ぶ。
3. $n > N$ であるすべての n について、 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ を保証する。

例： $a_n = 1/n$ が 0 に収束することの証明

任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $N \geq 1/\varepsilon$ となる自然数 N を選びます。すると $n > N$ なら $n > 1/\varepsilon$ なので、 $|a_n| = 1/n < \varepsilon$ です。これで定義の 3 段階をすべて満たしました。

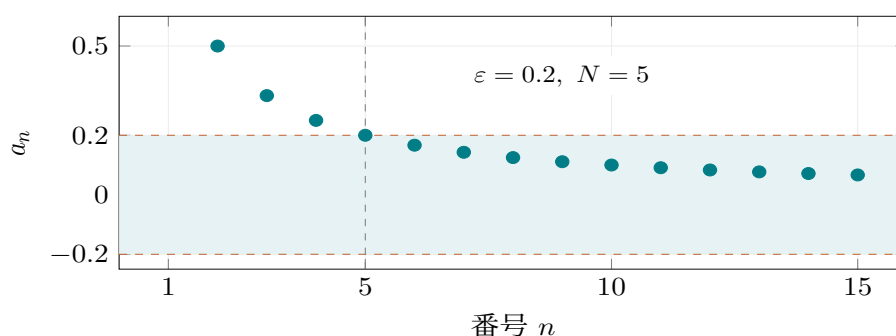


図1 図1 $n > 5$ のすべての点が帯の内側に入ります。第 1 項は表示範囲外です。

極限值に「到着」する必要はない

$1/n$ はどの有限の n でも 0 になりませんが、0 に収束します。逆に、定数列 $a_n = 0$ も 0 に収束します。「到着しないこと」も収束の条件ではありません。

定義では N を ε に応じて選べます。一方、選んだ N は、その後の n ごとに変えてはいけません。最初の有限個の項を変えても、収束性や極限值は変わりません。

2 極限計算：代入する前に式を整える

有理式は、分母の最高次数で割る

$$\frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + 5n - 4} = \frac{3 - 1/n + 1/n^2}{2 + 5/n - 4/n^2} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

分子・分母それぞれの極限が有限で、分母の極限が 0 でない形にすることで、商の極限法則が使えます。「 ∞/∞ 」自体を数として計算するものではありません。

根号の差は、有理化して打ち消しを見つける

$$\sqrt{4n^2 + n} - 2n = \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} = \frac{1}{\sqrt{4 + 1/n} + 2} \rightarrow \frac{1}{4}.$$

同様に、

$$n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) = \frac{2}{\sqrt{1 + 2/n} + 1} \rightarrow 1.$$

後者は「無限大に向かうもの」と「0 に向かうもの」の積ですが、その情報だけでは極限は決まりません。有理化して具体的に調べます。

分母が 0 に近づくときは、商の法則を使えない

分子・分母がともに 0 に近づいても、比の極限はさまざまです。

$$\frac{1/n}{1/n} = 1, \quad \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1/n}{1/n^2} = n \rightarrow +\infty.$$

「0/0」は答えではなく、さらに調べる必要のある形です。

微分への橋渡し： $h \rightarrow 0$ と $h = 0$ は違う

$f(x) = x^2$ について、 $h \neq 0$ のとき

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$$

したがって $h \rightarrow 0$ で、この値は $2x$ に近づきます。元の商は $h = 0$ では定義されませんが、**近づく先の値**は求められます。これは数列の極限から、関数の極限へ考え方を広げたものです。

3 振動と収束を区別する

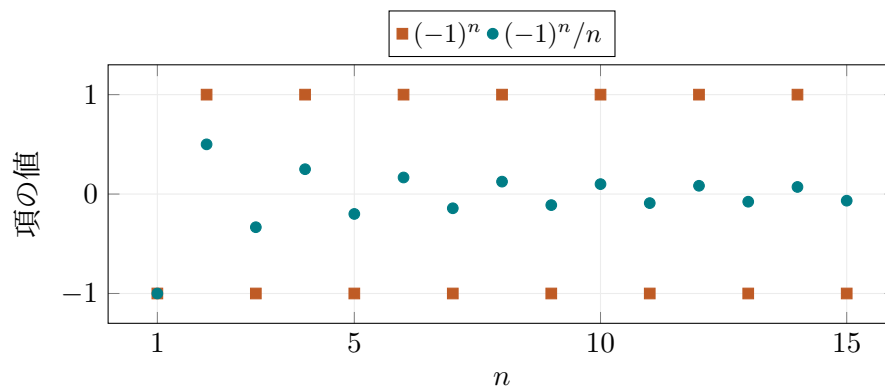


図2 上下すること自体は、不収束を意味しません。振れ幅を見ることが重要です。

$(-1)^n/n$ は $-1/n$ と $1/n$ にはさまれて 0 に収束します。一方、 $(-1)^n$ は偶数項が 1、奇数項が -1 なので収束しません。本文で「振動」を発散の分類名として使う場合と、単に上下する形を述べる場合を区別しましょう。

収束を保証する条件と、保証しない条件

条件	結論・例
単調増加かつ上に有界	有限の値に収束する
単調減少かつ下に有界	有限の値に収束する
有界だけ	不十分： $(-1)^n$
単調増加だけ	不十分： n
隣の項との差が 0 に近づく	不十分： $\log n$

$\log(n+1) - \log n = \log(1 + 1/n) \rightarrow 0$ ですが、 $\log n \rightarrow +\infty$ です。変化量が小さいだけでは、値が有限の場所に落ち着くとはいえません。

反復計算では「何が収束するか」を明確に

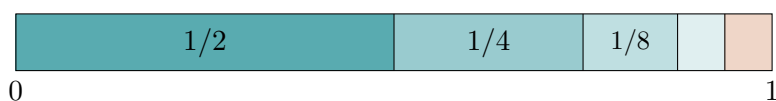
損失の値が単調に下がり、0 以上なら、その**損失値の列**は収束します。しかし、最小値に達することやパラメータ自体の収束までは、この事実だけでは保証されません。例えば $L(\theta) = \theta^2$ 、 $\theta_n = (-1)^n$ では損失は常に 1 ですが、パラメータは収束しません。

4 無限級数は「部分和の極限」

数列の項 a_n と、そこまでの合計 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ は別の数列です。級数の収束を調べるときは、 S_n の極限を調べます。

n	1	2	3	4
$a_n = 2^{-n}$	1/2	1/4	1/8	1/16
$S_n = 1 - 2^{-n}$	1/2	3/4	7/8	15/16
残り $1 - S_n$	1/2	1/4	1/8	1/16

青緑の合計 $S_4 = 15/16$ 、橙は残り $1/16$



等比級数は、和だけでなく誤差も分かる

$|r| < 1$ なら $S_n = a(1 - r^n)/(1 - r)$ 、 $S = a/(1 - r)$ なので、

$$|S - S_n| = \frac{|a||r|^n}{|1 - r|}.$$

例えば $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$ で誤差を 0.01 未満にするには、 $2^{-n} < 0.01$ より $n \geq 7$ で十分です。 $n = 6$ では $1/64 > 0.01$ です。

一般項が 0 に近づくことは、必要だが十分ではない

級数が収束すれば $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0$ です。しかし、その逆は成り立ちません。調和級数は $1/n \rightarrow 0$ でも発散します。実際、

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq 1/2} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right)}_{\geq 1/2} + \cdots$$

とまとめると、 $S_{2m} \geq 1 + m/2$ となり、部分和は無限に大きくなります。

等比級数では、初項が 0 ならすべての項が 0 で和も 0 です。初項が非零なら、収束条件は $|r| < 1$ です。負の公比でも、この条件を満たせば収束します。

5 本文の練習問題の解説

問 1：数列の極限計算

- (1) 分子・分母を n^2 で割って $\boxed{3/2}$ 。
 (2) 有理化して $1/(\sqrt{4+1/n}+2)$ となるので $\boxed{1/4}$ 。
 (3) 有理化して $2/(\sqrt{1+2/n}+1)$ となるので $\boxed{1}$ 。具体的な変形は 2 ページ で確認できます。

問 2：収束・発散・振動とはさみうち

- (1) $a_n = 2 + \{(-1)^n - 2\}/(n+1)$ なので、

$$|a_n - 2| \leq \frac{3}{n+1} \rightarrow 0.$$

したがって $\boxed{a_n \rightarrow 2}$ です。

- (2) $b_n = n - 1 + 2/(n+1)$ より $\boxed{b_n \rightarrow +\infty}$ 。
 (3) $c_{2m} = 2m/(2m+1) \rightarrow 1$, $c_{2m-1} = -(2m-1)/(2m) \rightarrow -1$ 。異なる極限をもつ部分列があるので、**振動して収束しません**。
 (4) $-1/n \leq \cos n/n \leq 1/n$ の両端が 0 に収束するので、はさみうちの原理から $\boxed{\cos n/n \rightarrow 0}$ です。

問 3：漸化式・論理記号・単調有界性

- (1) $a_2 = 3$, $a_3 = 9/2$, $a_4 = 21/4$ です。
 (2) 収束するなら $L = \frac{1}{2}L + 3$, したがって候補は $L = 6$ 。さらに $b_n = a_n - 6$ とおくと、 $b_{n+1} = b_n/2$, $b_1 = -6$ なので、

$$a_n = \boxed{6 - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \rightarrow \boxed{6}.$$

これで候補を求めるだけでなく、収束も確認できました。

- (3) 求める論理式は

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > N \Rightarrow |a_n - 2| < \varepsilon.$$

- (4) $a_n = 1 - 3^{-n}$ について、

$$a_{n+1} - a_n = 3^{-n} - 3^{-(n+1)} = 2 \cdot 3^{-(n+1)} > 0.$$

また $a_n < 1$ なので上に有界であり、収束します。 $3^{-n} \rightarrow 0$ より極限は $\boxed{1}$ です。

極限の候補と、収束の証明は別

漸化式の両辺で形式的に極限を取るだけでは不十分です。収束を先に示すか、上のように一般項を求めて、候補へ実際に近づくことを確認します。

6 追加問題：定義・誤差・級数をつなぐ

A：誤差幅に応じた番号を選ぶ

$a_n = 2 + 3/n$ について、 $n > N$ なら $|a_n - 2| < 0.01$ となる自然数 N を 1 つ求めよ。さらに任意の $\varepsilon > 0$ に対する選び方を述べよ。

B：収束を決めつけない

$a_{n+1} = 2a_n - 1$, $a_1 = 2$ とする。(1) 収束を仮定して極限候補を求めよ。(2) $b_n = a_n - 1$ を用いて一般項を求め、実際の挙動を答えよ。

C：負の公比の無限等比級数

$3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \dots$ の和 S を求めよ。また第 n 部分和 S_n について、 $|S - S_n| < 0.01$ となる最小の n を求めよ。

D：項の極限と級数の収束

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} 1$, (2) $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\{k(k+1)\}$ の収束性を調べ、収束するものは和を求めよ。後者では $1/\{k(k+1)\} = 1/k - 1/(k+1)$ を用いてよい。

解答・解説

A： $N = 300$ とすれば $n > 300$ より $3/n < 0.01$ です。一般には $N \geq 3/\varepsilon$ となる自然数を選べばよいです。等号を含む N の条件と、厳密な不等式 $n > N$ を区別します。

B：(1) $L = 2L - 1$ より候補は 1。

(2) $b_{n+1} = 2b_n$, $b_1 = 1$ なので $a_n = 1 + 2^{n-1} \rightarrow +\infty$ 。候補 1 には近づきません。「収束するなら」という仮定が成立していないためです。

C： $a = 3, r = -1/2$ なので $S = 3/(1 + 1/2) = 2$ です。

$$|S - S_n| = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n = 2^{1-n}.$$

$n = 8$ で $1/128 < 0.01$, $n = 7$ では $1/64 > 0.01$ なので、最小は $\boxed{n=8}$ です。

D：(1) 部分和 $S_n = n \rightarrow +\infty$ で発散。一般項が 0 に近づかないことから判定できます。

(2) $S_n = \sum_{k=1}^n \{1/k - 1/(k+1)\} = 1 - 1/(n+1) \rightarrow 1$ 。よって収束し、和は $\boxed{1}$ です。

学習の確認：数列は「項の列」、級数は「部分和の列」の極限を見るものです。一般項が小さくなることと、その合計が有限になることを区別しましょう。