

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

微分の基礎

平均変化率から瞬間変化率へ

1 平均変化率：縦の変化を横の変化で割る

$f(x) = x^2$ の $x = 1$ から $x = 3$ までを見ると、入力に 2 増え、出力は $9 - 1 = 8$ 増えます。平均変化率は $8/2 = 4$ です。これは関数値の平均 $(1 + 9)/2 = 5$ とは違います。

一方の点を固定し、もう一方を近づける

固定点を $A = (1, 1)$ 、移動する点を $B = (1 + h, (1 + h)^2)$ とすると、割線の傾きは

$$\frac{(1 + h)^2 - 1}{h} = 2 + h \quad (h \neq 0).$$

h	1	0.1	0.01	-1	-0.1	-0.01
割線の傾き $2 + h$	3	2.1	2.01	1	1.9	1.99

h を正からも負からも 0 に近づけると、傾きは 2 に近づきます。これが $f'(1) = 2$ という意味です。

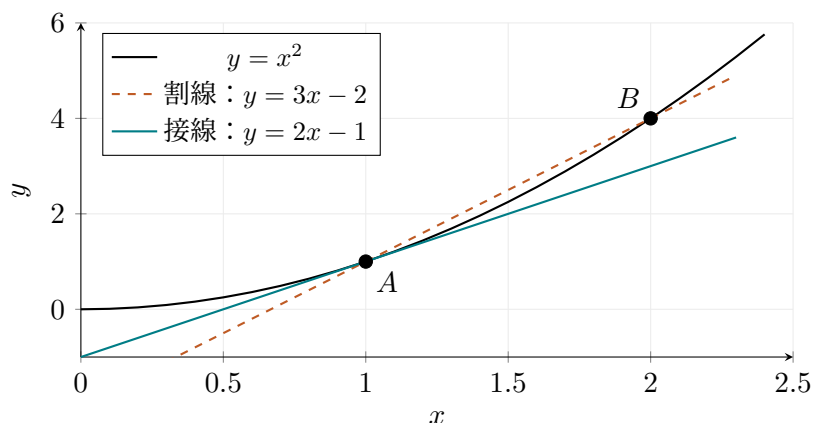


図 1: $h = 1$ の割線と、 $h \rightarrow 0$ で得られる接線。傾きはそれぞれ 3 と 2 です。

補足: $h < 0$ では移動点は左側です。区間として書くなら $[a + h, a]$ となりますが、差商 $(f(a + h) - f(a))/h$ は同じ形で使えます。

2 微分係数は数、導関数は関数

$f'(a)$ は指定された点での傾きという**数**です。 $f'(x)$ は、点 x を変えると傾きはどう変わるかを表す**関数**です。

定義から計算する 4 段階

$f(x) = x^2 + 3x$ を例にします。

1. $f(x+h) = (x+h)^2 + 3(x+h)$ を作る。
2. $f(x)$ を引いて、 $f(x+h) - f(x) = 2xh + h^2 + 3h$ とする。
3. $h \neq 0$ のもとで h で割り、 $2x + h + 3$ とする。
4. 最後に $h \rightarrow 0$ の極限を取り、 $f'(x) = 2x + 3$ を得る。

最初から $h = 0$ を代入しない

元の差商に $h = 0$ を入れると $0/0$ となり、定義されません。約分は $h \neq 0$ で行い、その後で近づく先を求めます。 dy/dx もここでは導関数を表す記号であり、単なる「0 を 0 で割った値」ではありません。

接線には、点と傾きの両方が必要

$x = a$ で微分可能なら、接線は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

上の例では $f(1) = 4$ 、 $f'(1) = 5$ なので、 $y - 4 = 5(x - 1)$ 、つまり $y = 5x - 1$ です。**導関数の式 $y = 2x + 3$ が接線になるわけではありません。**

接線による近似：小さい変化を見積もる

$x = 1 + h$ と書くと、この例では厳密に

$$f(1+h) = 4 + 5h + h^2.$$

h が小さいときは h^2 が小さいので、 $f(1+h) \approx 4 + 5h$ と近似できます。 $h = 0.02$ なら、近似値 4.1、正確な値 4.1004、誤差 0.0004 です。

微分係数の単位も読む

x が時間 (秒)、 $f(x)$ が位置 (m) なら、 $f'(x)$ の単位は m/s です。費用 (円) を数量 (個) で微分するなら円/個です。傾きの単位は「出力の単位／入力単位」になります。

3 連続でも微分できないことがある

連続性は「近くの入力に対する値が、その点の値に近い」ことです。微分可能性にはさらに、左右から見た差商が同じ有限値に近づくことが必要です。ここでは定義域の内点を考えます。

例： $f(x) = |x|$ の原点

$f(0) = 0$ で、 $x \rightarrow 0$ なら $|x| \rightarrow 0$ なので連続です。しかし、 $h \neq 0$ では

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & (h > 0), \\ -1 & (h < 0). \end{cases}$$

右からの傾き 1 と左からの傾き -1 が一致しないので、 $f'(0)$ は存在しません。

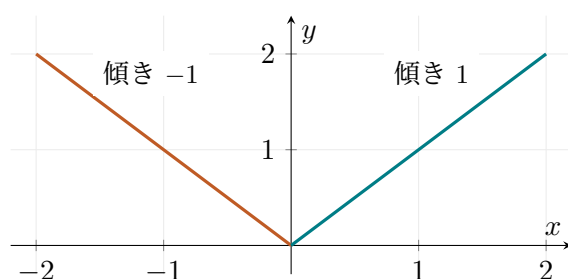


図 2：グラフはつながっていますが、原点では左右の傾きが異なります。

なぜ微分可能なら連続なのか

$h \neq 0$ で、次のように書けます。

$$f(a+h) - f(a) = h \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

$h \rightarrow 0$ のとき、第 1 因子は 0、第 2 因子は有限の $f'(a)$ に近づきます。したがって積は 0 に近づき、 $f(a+h) \rightarrow f(a)$ 、つまり連続です。

接線についての思い込みを避ける

接線は「グラフと 1 点でしか交わらない直線」とは限りません。例えば $y = x^3$ の原点での接線は $y = 0$ で、曲線は接線を横切ります。接線は、その点での微分係数を傾きにもつ直線として考えます。

4 平均値の定理：区間の傾きが途中に現れる

f が $[a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能なら、ある $c \in (a, b)$ で

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

が成り立ちます。割線と平行な接線が、区間の内部のどこかに存在するということです。

例： $f(x) = x^2$ 、区間 $[1, 3]$

平均変化率は $(9 - 1)/(3 - 1) = 4$ です。 $f'(c) = 2c = 4$ より $c = 2$ となります。

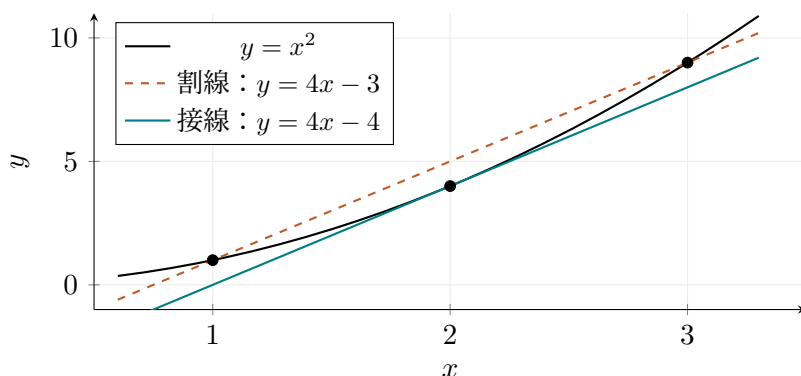


図 3：2 本の直線の傾きは同じ 4 ですが、通る点が違います。

保証されるのは存在であり、位置や個数ではない

c は一般に区間の midpoint とは限りません。 $f(x) = x^3$ 、区間 $[0, 2]$ なら平均変化率は 4 で、 $3c^2 = 4$ より $c = 2/\sqrt{3}$ です。また、条件を満たす c が複数ある場合もあります。

仮定を外すと、結論が成り立たない例

$f(x) = |x|$ を $[-1, 1]$ で考えると、平均変化率は 0 です。しかし、 $x \neq 0$ での導関数は -1 または 1 で、 $x = 0$ では微分できません。傾き 0 の点はなく、平均値の定理の微分可能性の仮定が欠けています。

注意：「平均値の定理」という名前ですが、関数値の算術平均についての主張ではなく、平均変化率と微分係数を結ぶ定理です。

5 本文の練習問題：解答と解説

問 1: $f(x) = x^2$ の平均変化率と微分係数

(1) 区間 $[1, 3]$ では

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = \boxed{4}.$$

(2) 定義から

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = \boxed{2x}.$$

(3) $f'(2) = \boxed{4}$ です。これは区間 $[1, 3]$ の平均変化率と一致します。

問 2: 位置と速度の違い

$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ について、 $s(1) = 4$ 、 $s(3) = 0$ です。したがって平均速度は

$$\frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{0 - 4}{2} = \boxed{-2}.$$

負号は、正の向きと逆方向へ平均として動いたことを表します。 s の単位を m、 t の単位を秒とすれば、答えの単位は m/s です。

差商を展開すると

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h} = 3t^2 - 12t + 9 + (3t - 6)h + h^2.$$

よって $s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ であり、 $s'(2) = 12 - 24 + 9 = \boxed{-3}$ です。

平均速度と平均の速さ

平均速度は「変位／時間」、平均の速さは「移動距離／時間」です。この例では $s'(t) = 3(t-1)(t-3) < 0$ が $1 < t < 3$ で成り立ち、ずっと負の向きに動くため、移動距離は 4、平均の速さは 2 です。瞬間の速さは $|s'(2)| = 3$ です。

問 3: $f(x) = x^3$ の $x = 1$ での接線

$f(1) = 1$ です。また、

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$$

$f'(1) = 3$ なので、接線は $y - 1 = 3(x - 1)$ 、すなわち $\boxed{y = 3x - 2}$ です。 $(1, 1)$ を代入して通ることを検算します。

6 追加問題：計算と意味を結びつける

A：負の h でも差商を計算する

$f(x) = x^2$ について、 $x = 2$ を固定する。(1) 差商 $(f(2+h) - f(2))/h$ を求めよ。(2) $h = 0.1, -0.1$ の値と、その極限を答えよ。

B：定義から導関数と接線を求める

$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ の導関数を定義から求め、 $x = 1$ での接線の方程式を求めよ。

C：連続性と左右の微分係数

$f(x) = x$ ($x \geq 0$)、 $f(x) = 2x$ ($x < 0$) とする。原点で連続か、微分可能かを答え、理由を述べよ。

D：平均値の定理を具体的に確かめる

$f(x) = x^2 + 3x$ を区間 $[0, 2]$ で考える。平均変化率を求め、それと同じ微分係数をもつ $c \in (0, 2)$ を求めよ。その点での接線も答えよ。

解答・解説

A：差商は $(4 + 4h + h^2 - 4)/h = 4 + h$ 。 $h = 0.1$ で 4.1、 $h = -0.1$ で 3.9、両側からの極限は $\boxed{4}$ です。

B：差商は

$$\frac{3(x+h)^2 - 2(x+h) + 1 - (3x^2 - 2x + 1)}{h} = 6x + 3h - 2.$$

したがって $f'(x) = 6x - 2$ 。 $f(1) = 2$ 、 $f'(1) = 4$ なので、接線は $\boxed{y = 4x - 2}$ です。

C：左右どちらからも $f(x) \rightarrow 0 = f(0)$ なので連続です。しかし差商 $f(h)/h$ は右から 1、左から 2 となるため、微分可能ではありません。

D：この関数は閉区間 $[0, 2]$ で連続、开区間 $(0, 2)$ で微分可能です。平均変化率は

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{10 - 0}{2} = 5.$$

$f'(x) = 2x + 3$ なので、 $2c + 3 = 5$ を解くと $\boxed{c = 1}$ です。 $f(1) = 4$ より、接線は $y - 4 = 5(x - 1)$ 、すなわち $\boxed{y = 5x - 1}$ です。割線 $y = 5x$ と平行ですが、同じ直線ではありません。

図の確認：ご提示の本文図では、傾き 1.2 の赤い破線が割線、傾き 0.6 の青い実線が接線です。凡例の登録順が線と対応していないため、原稿編集時に合わせて直すと誤読を防げます。