

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

微分計算の基本法則

基本関数の導関数・接線・つなぎ目の理解

1 項ごとに微分する：線形性の使い方

微分公式は、定義による極限計算を済ませた結果です。公式を使うときも「どの変数について微分するか」「どの範囲で関数が定義されるか」を確認します。

定数は変化せず、定数倍はそのまま残る

$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7$ を項ごとに分けます。

項	導関数	考え方
$3x^4$	$12x^3$	係数 3 を残して x^4 を微分
$-2x^2$	$-4x$	負号と係数を残す
$5x$	5	x の変化率は 1
-7	0	入力が変わっても値は一定

したがって、 $f'(x) = 12x^3 - 4x + 5$ です。途中では 0 になる項も書くと、計算漏れを防げます。

線形性が成り立つ理由

$F(x) = af(x) + bg(x)$ 、 a, b を定数とすると、差商は

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = a \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + b \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

f, g が微分可能な点で極限を取れば、 $F'(x) = af'(x) + bg'(x)$ です。

変数によって「定数」は変わる

$F(x) = ax^2 + b$ で a, b が固定なら、 x についての導関数は $2ax$ です。 a まで変化する量と考える問題では、同じ扱いはできません。

間違いを見つける練習

「 $(4x^3 + 6)' = 12x^2 + 6$ 」は誤りです。定数 6 の微分は 0 なので、正しくは $12x^2$ です。また、 $(x)' = 1$ であって 0 ではありません。

このノートでは、本文の範囲である和・差・定数倍と基本関数の公式を中心に扱います。積・商・合成関数の微分法則は、次の段階で学びます。

2 ベキ関数の微分と、公式を使える範囲

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$$

整数だけでなく、負の指数や分数の指数も同じ形で扱えます。ただし、実数値として定義できる範囲を確認します。

関数	導関数	ここで公式を使う範囲
x^3	$3x^2$	$x \in \mathbb{R}$
$1/x = x^{-1}$	$-x^{-2} = -1/x^2$	$x \neq 0$
$1/x^2 = x^{-2}$	$-2x^{-3}$	$x \neq 0$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$1/(2\sqrt{x})$	$x > 0$
$x^{3/2}$	$(3/2)\sqrt{x}$	$x > 0$

一般の実数 r に対しては、 $x > 0$ とすれば統一して扱えます。 $r = 0$ では $x^0 = 1$ は定数なので、導関数は 0 です。 $0x^{-1}$ を $x = 0$ に代入する必要はありません。

関数が定義されることと、微分できることは別

$\sqrt{x}$ は $x = 0$ で定義されます。しかし右側からの差商は

$$\frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \rightarrow +\infty \quad (h \rightarrow 0+).$$

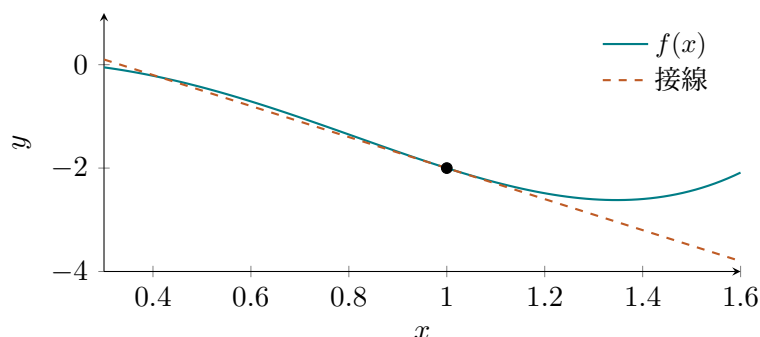
したがって、原点で有限の右微分係数はありません。端点では通常の間側微分と片側微分を区別します。

本文の多項式の例：点と傾きを別々に求める

$f(x) = x^4 - 4x^2 + x$ なら、 $f'(x) = 4x^3 - 8x + 1$ です。 $x = 1$ で、

$$f(1) = -2, \quad f'(1) = -3.$$

接線は $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ なので、 $y = -3x + 1$ です。



接線は、その点の近くで曲線を直線として近似します。導関数 $f'(x)$ のグラフそのものとは違います。

3 指数と対数：底の違いが係数になる

べき関数と指数関数を区別する

$$(x^2)' = 2x, \quad (2^x)' = 2^x \log 2.$$

x^2 は底が変数で、 2^x は指数が変数です。指数関数では「指数を前に出す」というべき関数の規則は使いません。

関数	導関数	傾きの符号
e^x	e^x	正
2^x	$2^x \log 2$	正
$(1/2)^x$	$-(\log 2)(1/2)^x$	負

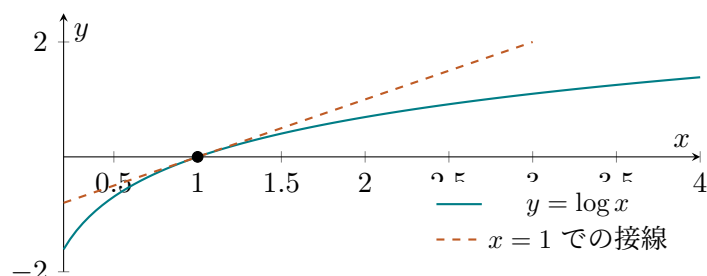
$a^x > 0$ なので、導関数の符号は $\log a$ で決まります。 $a > 1$ で増加、 $0 < a < 1$ で減少です。 $a = 1$ の場合も関数 $1^x = 1$ は定義され、微分すると 0 です。

自然対数と常用対数

底の変換公式 $\log_a x = (\log x)/(\log a)$ と定数倍の微分より、

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\log a} (\log x)' = \frac{1}{x \log a}.$$

特に、 $(\log_{10} x)' = 1/(x \log 10)$ です。本文の $\log x$ は自然対数なので、導関数は $1/x$ となります。



グラフの形と導関数を結びつける

$x > 0$ では $1/x > 0$ なので $\log x$ は増加します。しかし x が大きくなるほど傾きは小さくなります。「増加していること」と「増加が速くなること」は別です。

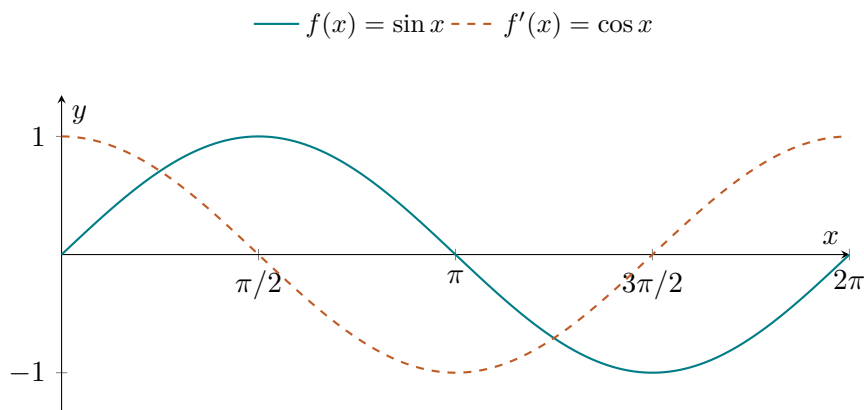
確認例

$g(x) = e^x + \log x$ は $x > 0$ で定義され、 $g'(x) = e^x + 1/x > 0$ です。したがって、この範囲で増加します。

4 三角関数：グラフの傾きとラジアン

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

グラフの山や谷では傾きが 0 になります。 $\sin x$ が増加する区間では $\cos x > 0$ 、減少する区間では $\cos x < 0$ となります。



x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\sin x$	0	1	0	-1
傾き $\cos x$	1	0	-1	0

なぜラジアンで測るのか

微分公式の基礎となる $\lim_{h \rightarrow 0} (\sin h)/h = 1$ は、 h をラジアンで測るときの式です。度数法の変数 θ では、 h 度が $\pi h/180$ ラジアンに当たります。原点での差商は

$$\frac{\sin(\pi h/180)}{h} = \frac{\pi}{180} \frac{\sin(\pi h/180)}{\pi h/180} \rightarrow \frac{\pi}{180}.$$

このため、度数法の変数に対する導関数には係数 $\pi/180$ が現れます。

タンジェントの定義域も確認する

$\tan x$ は $x = \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) では定義されません。それ以外では、

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

したがって、各区間 $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ で増加します。定義されない点を飛び越えて、全体が単調増加だとはいきません。

5 本文の練習問題：解答と解説

問 1: $f(x) = x^2 - 4 \log x$, $x > 0$

項ごとに微分して、

$$f'(x) = 2x - \frac{4}{x}.$$

したがって、 $f'(1) = 2 - 4 = -2$ 、 $f'(2) = 4 - 2 = 2$ です。 $x = 1$ では $f(1) = 1$ なので、接線は

$$y - 1 = -2(x - 1), \quad y = -2x + 3.$$

傾きが負なので $x = 1$ の近くでは減少し、 $x = 2$ の近くでは増加しています。

問 2: つなぎ目で「高さ」と「傾き」をそろえる

$x < 1$ では $ax + b$ 、 $x \geq 1$ では x^2 です。 $f(1) = 1$ なので、連続性の条件は

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (ax + b) = a + b = 1.$$

この条件を満たすとき、 $h < 0$ での差商は

$$\frac{a(1+h) + b - 1}{h} = a.$$

一方、 $h > 0$ では $\{(1+h)^2 - 1\}/h = 2 + h \rightarrow 2$ です。左右の極限を等しくして $a = 2$ 、連続性から $b = -1$ を得ます。

$$a = 2, \quad b = -1.$$

傾きだけをそろえると何が起こるか

$a = 2, b = 0$ でも左右の導関数の極限は 2 ですが、左側の値は 2 へ、右側の値は 1 へ近づき、つながりません。微分可能性を調べる前に連続性を確認することが大切です。

問 3: 基本関数の微分

$$f(x) = x^3 - 4x + 1 \implies f'(x) = 3x^2 - 4,$$

$$g(x) = e^x + \log x \implies g'(x) = e^x + \frac{1}{x} \quad (x > 0),$$

$$h(x) = \sin x + \cos x \implies h'(x) = \cos x - \sin x.$$

検算の視点：定数項が消えているか、係数を残しているか、 $\cos x$ の微分の負号を落としていないか、定義域を保っているかを確認します。

6 追加問題：計算と意味を確かめる

A：基本公式と定義域

次の関数の導関数を求め、公式を使う範囲を答えよ。

$$(1) 3x^4 - \frac{2}{x} + 5 \quad (2) \sqrt{x} + \log_{10} x \quad (3) 2^x - 3 \cos x.$$

B：接線と導関数の違い

$f(x) = x^3 - 2x + 4$ の $x = 1$ での接線を求めよ。また、 $y = f'(x)$ がその接線と同じ式になるかを答えよ。

C：別のつなぎ目を作る

$f(x) = ax + b$ ($x < 2$)、 $f(x) = x^2$ ($x \geq 2$) が $x = 2$ で連続かつ微分可能になる a, b を求めよ。

D：符号から増減を読む

$f(x) = x^2 - 4 \log x$ ($x > 0$) の導関数が 0 になる点を求め、その前後で導関数の符号を調べよ。

解答・解説

A(1) $3x^4 - 2x^{-1} + 5$ と書けば、 $12x^3 + 2/x^2$ 、 $x \neq 0$ です。負の係数と負の指数を掛けるので、第 2 項は正になります。

A(2) $1/(2\sqrt{x}) + 1/(x \log 10)$ 、 $x > 0$ です。平方根と対数の両方の条件を満たす範囲で考えます。

A(3) $2^x \log 2 + 3 \sin x$ 、すべての実数 x です。

B $f'(x) = 3x^2 - 2$ 、 $f(1) = 3$ 、 $f'(1) = 1$ なので、接線は $y - 3 = x - 1$ 、つまり $y = x + 2$ です。導関数のグラフ $y = 3x^2 - 2$ とは異なります。

C 連続性から $2a + b = 4$ 、左右の傾きの一致から $a = 4$ です。よって $a = 4, b = -4$ 。左側の直線は放物線の $x = 2$ での接線になります。

D $f'(x) = 2x - 4/x = 2(x^2 - 2)/x$ です。 $x > 0$ より、 $f'(x) = 0$ となるのは $x = \sqrt{2}$ 。 $0 < x < \sqrt{2}$ で負、 $x > \sqrt{2}$ で正なので、ここで減少から増加に変わります。最小値は $f(\sqrt{2}) = 2 - 2 \log 2$ です。

学習の到達点

公式を正しく使い、定義域を確認し、導関数を接線の傾きや関数の増減と結びつけられれば、この節の基本が身についています。