

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

# 積の微分法則と連鎖律

式の構造を読み、変化率を組み合わせる

## 1 積の微分に 2 つの項が現れる理由

$F(x) = f(x)g(x)$  とします。 $x$  を  $h$  だけ変えたときの増分を  $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ ,  $\Delta g = g(x+h) - g(x)$  とすると、

$$\Delta F = (f + \Delta f)(g + \Delta g) - fg = g\Delta f + f\Delta g + \Delta f\Delta g.$$

|            |             |                    |
|------------|-------------|--------------------|
| $\Delta f$ | $g\Delta f$ | $\Delta f\Delta g$ |
| $f$        | $fg$        | $f\Delta g$        |
|            | $g$         | $\Delta g$         |

図は  $f, g$  と増分が正の場合の模式図です。増分が負でも、上の代数的な等式は成り立ちます。

$h \neq 0$  で割ると、

$$\frac{\Delta F}{h} = g \frac{\Delta f}{h} + f \frac{\Delta g}{h} + \frac{\Delta f}{h} \Delta g.$$

$f, g$  が微分可能なら、最後の項は  $f'(x) \cdot 0 = 0$  に近づきます。したがって、

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

### よくある間違い：両方を同時に微分しない

$f(x) = g(x) = x$  とすると、 $(fg)' = (x^2)' = 2x$  です。一方、 $f'g' = 1$  なので、積の微分は導関数どうしの積ではありません。

片方を微分し、もう片方はそのまま

積の微分では、 $f$  の変化による寄与  $f'g$  と、 $g$  の変化による寄与  $fg'$  を足し合わせます。

## 2 商の微分と、計算前の整理

商の微分は「上の微分 × 下ー上 × 下の微分」

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (g \neq 0).$$

分子の引き算の順序と、分母の 2 乗を確かめます。分子と分母を別々に微分して  $f'/g'$  とすることはできません。

例：分子を括弧付きで代入する

$y = (x^2 + 1)/(x - 1)$  では、 $f = x^2 + 1$ 、 $g = x - 1$  なので、

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2x(x-1) - (x^2+1) \cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \quad (x \neq 1). \end{aligned}$$

特に  $-(x^2 + 1) = -x^2 - 1$  です。括弧を先に外して負号を落とさないようにします。

先に割り算をすると、より簡単なことがある

同じ関数は  $y = x + 1 + 2/(x - 1)$  と書けます。この形なら、連鎖律を用いて

$$y' = 1 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

2 通りの計算結果が一致することは、検算にも使えます。

約分しても、元の定義域を忘れない

$(x^2 - 1)/(x - 1) = x + 1$  は  $x \neq 1$  での等式です。導関数はその範囲で 1 ですが、元の関数は  $x = 1$  で定義されていません。約分だけで欠けた点が補われるわけではありません。

## 3 つの積も、1 つずつ微分する

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

例えば、 $y = x^2 e^x \sin x$  なら、

$$y' = 2xe^x \sin x + x^2 e^x \sin x + x^2 e^x \cos x.$$

「どの因子を微分した項か」を確認すれば、項の数も確かめられます。

積と商を区別する確認例

$$(x \log x)' = \log x + 1, \quad \left(\frac{\log x}{x}\right)' = \frac{1 - \log x}{x^2} \quad (x > 0).$$

### 3 連鎖律は「各段階の変化率の積」

$y = (x^2 + 1)^3$  なら、内側を  $u = x^2 + 1$ 、外側を  $y = u^3$  と分けます。

| 段階     | 関数            | 変化率            |
|--------|---------------|----------------|
| 入力から中間 | $u = x^2 + 1$ | $du/dx = 2x$   |
| 中間から出力 | $y = u^3$     | $dy/du = 3u^2$ |

よって、 $y' = 3u^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 1)^2$  です。 $x = 1$  では  $u = 2$  なので、 $dy/dx = 12 \cdot 2 = 24$  です。

#### 外側を微分したら、中身はそのまま残す

$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$  です。 $f'(x)g'(x)$  としないこと、内側の微分  $g'(x)$  を忘れないことが重要です。 $dy/du$  などは導関数の記号であり、単なる分数の約分を根拠にするわけではありません。

#### 多段の合成：本文の例を 3 段に分ける

$u = 3x + 1$ 、 $v = u^2$ 、 $y = e^v$  とおくと、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \frac{dv}{du} \frac{du}{dx} = e^v \cdot 2u \cdot 3 = 6(3x + 1)e^{(3x+1)^2}.$$

#### 商の微分も、積と連鎖律から導ける

$g(x) \neq 0$  の範囲で  $f/g = f g^{-1}$  と見れば、

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f'g^{-1} + f(-g^{-2}g') = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

例えば、 $y = x/(x+1)$  では、

$$y' = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \quad (x \neq -1).$$

#### 本文・連鎖律の間 3

$$\boxed{\{(x^2 + 1)^3\}' = 6x(x^2 + 1)^2}, \quad \boxed{(\sin 2x)' = 2 \cos 2x}.$$

後者の係数 2 は、内側  $2x$  が  $x$  の 2 倍の速さで変化することに由来します。

#### 積か合成かを見分ける確認例

$$(x^2 e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x, \quad (e^{x^2})' = 2x e^{x^2}.$$

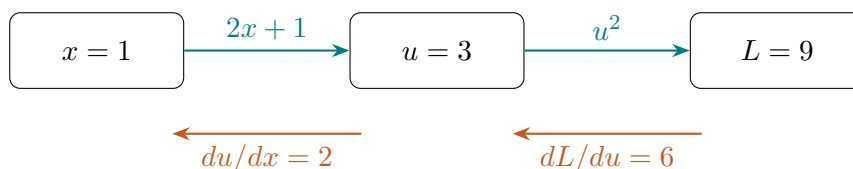
左は 2 つの関数の積、右は指数関数の中に  $x^2$  を入れた合成関数です。

## 4 計算の流れをたどる：連鎖律と逆伝播

連鎖律では、各段階の導関数を、その段階に入る値で評価します。ここでは 1 変数の例で、順方向の計算と逆方向の微分を比べます。

例： $L(x) = (2x + 1)^2$  を  $x = 1$  で調べる

$u = 2x + 1$ 、 $L = u^2$  と置きます。まず値を順に計算すると、 $x = 1$ 、 $u = 3$ 、 $L = 9$  です。



出力側から変化率をたどると、 $dL/du = 2u = 6$ 、 $du/dx = 2$  なので、

$$\frac{dL}{dx} = 6 \cdot 2 = 12.$$

$x$  が 0.01 増えると、 $L$  の増分はおよそ  $12 \times 0.01 = 0.12$  です。正確には  $(3.02)^2 - 9 = 0.1204$  であり、近似とよく一致します。

### ニューラルネットワークへのつながり

逆伝播は、計算を逆にして入力を変元する操作ではありません。順方向で得た中間値を使い、出力の変化率から入力やパラメータに関する変化率を計算します。多くの変数を持つ場合には、各変数についての偏微分を同じ考え方で求めます。

### 枝分かれする場合は、各経路の寄与を足す

$F(x) = x^2 + x$  では、 $x$  は「2 乗する経路」と「そのまま足す経路」の両方に影響します。したがって、 $F'(x) = 2x + 1$  です。積の微分の 2 項も、2 つの因子を通じた寄与として理解できます。

#### 内側の導関数が 0 でも連鎖律は使える

$y = e^{x^2}$  では  $y' = 2xe^{x^2}$  なので、 $x = 0$  で  $y' = 0$  です。内側の導関数を割る必要はありません。 $dy/du$  と  $du/dx$  の表記を、無条件の分数の約分と考えることが大切です。

## 5 複数の法則を組み合わせて解く

### 本文・連鎖律の間 1：積と合成が同時に現れる

$f(x) = (x^2 + 1)^3 e^{-x}$  の最も外側は積です。まず、

$$\{(x^2 + 1)^3\}' = 6x(x^2 + 1)^2, \quad (e^{-x})' = -e^{-x}.$$

積の微分を用いて、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x(x^2 + 1)^2 e^{-x} - (x^2 + 1)^3 e^{-x} \\ &= \boxed{(x^2 + 1)^2 e^{-x} (-x^2 + 6x - 1)}. \end{aligned}$$

共通因子をくくると、増減の判定もしやすくなります。

### 本文・連鎖律の間 2：対数の法則で先に整理する

$x > 1$  なので  $x^2 + 1 > 0$ 、 $x - 1 > 0$  です。したがって、

$$h(x) = \log(x^2 + 1) - \log(x - 1).$$

連鎖律を用いると、

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x - 1} = \boxed{\frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)(x - 1)}}.$$

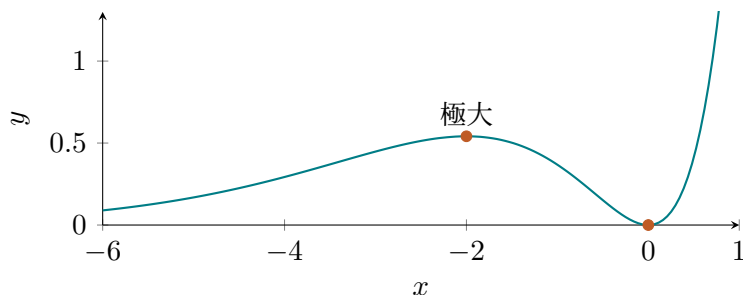
別解として、 $u = (x^2 + 1)/(x - 1)$  を商の微分で求め、 $h' = u'/u$  を使っても同じ式になります。

### 本文の増減例：極大と最大は違う

$y = x^2 e^x$  では  $y' = e^x x(x + 2)$  なので、

| $x$  | $(-\infty, -2)$ | $-2$         | $(-2, 0)$ | $0$  | $(0, \infty)$ |
|------|-----------------|--------------|-----------|------|---------------|
| $y'$ | +               | 0            | -         | 0    | +             |
| $y$  | 増加              | 極大 $4e^{-2}$ | 減少        | 極小 0 | 増加            |

$x = -2$  では近くの点と比べて大きくなりますが、 $x \rightarrow \infty$  で  $y \rightarrow \infty$  なので、全体の最大値ではありません。一方、 $x^2 e^x \geq 0$  より、 $x = 0$  での値 0 は全体の最小値でもあります。



## 6 追加問題と解答：法則を選んで計算する

A：最初に使う法則を答えて微分する

$$(1) x^2 \log x \ (x > 0) \quad (2) \frac{x}{x^2 + 1} \quad (3) \cos(x^2).$$

B：中間変数を置く

$y = \log(1 + e^{2x})$  を微分せよ。さらに  $x = 0$  での微分係数を求めよ。

C：誤りを説明する

次の式のどこが誤りかを説明し、正しい導関数を書け。

$$\{(x^2 + 1)^3\}' = 3(x^2 + 1)^2, \quad \left(\frac{x^2}{x + 1}\right)' = 2x.$$

D：積の法則と展開による計算を比べる

$y = (x^2 + 1)(x + 2)$  を、積の法則を用いる方法と、先に展開する方法で微分し、結果が一致することを確認せよ。

### 解答・解説

A(1) 積の法則より、 $2x \log x + x^2(1/x) = \boxed{2x \log x + x}$  です。

A(2) 商の法則より、

$$\frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \boxed{\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}}.$$

分母は常に正なので、すべての実数  $x$  で定義されます。

A(3) 連鎖律より  $\boxed{-2x \sin(x^2)}$  です。外側の微分による負号と、内側の微分  $2x$  を両方残します。

B  $u = 2x$ 、 $v = 1 + e^u$ 、 $y = \log v$  とおけば、

$$y' = \frac{1}{v} \cdot e^u \cdot 2 = \boxed{\frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}}, \quad \boxed{y'(0) = 1}.$$

$1 + e^{2x} > 0$  なので、対数はすべての実数  $x$  で定義されます。

C 第 1 式は内側の微分  $2x$  が抜けています。正しくは  $\boxed{6x(x^2 + 1)^2}$ 。第 2 式は分子・分母を別々に微分して割っています。正しくは  $\boxed{(x^2 + 2x)/(x + 1)^2}$ 、 $x \neq -1$  です。

D 積の法則では  $2x(x + 2) + (x^2 + 1) = 3x^2 + 4x + 1$ 。展開すると  $y = x^3 + 2x^2 + x + 2$  なので、やはり  $\boxed{y' = 3x^2 + 4x + 1}$  です。

確認の順序：最も外側の演算を見つける、必要なら中間変数を置く、各項を丁寧に微分する、定義域と負号を確認する、共通因子や通分で整理する。