

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

限界費用と限界効用

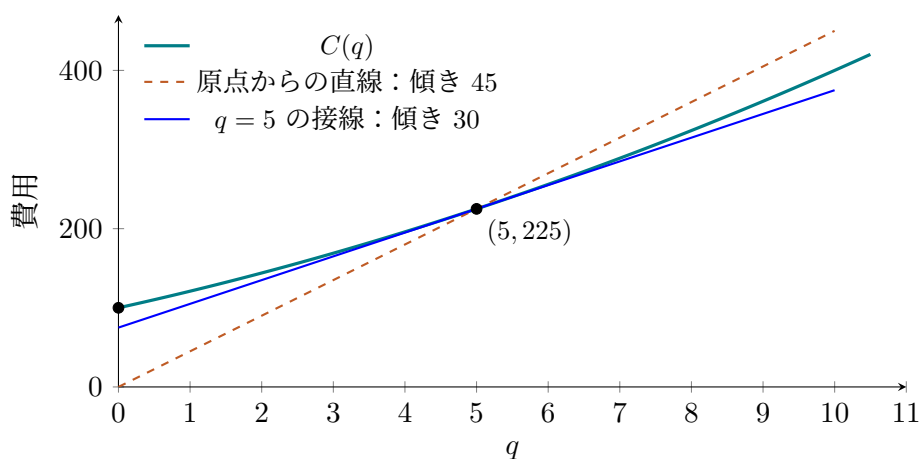
「全体の平均」と「いま増やす分」を区別する

1 平均費用と限界費用を図で読む

総費用を $C(q) = 100 + 20q + q^2$ とします。生産しなくても必要な固定費は $C(0) = 100$ です。 $q > 0$ において、

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{100}{q} + 20 + q, \quad MC(q) = C'(q) = 20 + 2q.$$

例えば $q = 5$ では、総費用は 225、平均費用は 45、限界費用は 30 です。平均費用は固定費も含めた全費用を生産量で割り、限界費用は現在の生産量の近くでの変化率を表します。



原点からの傾きと平均変化率は区別する

平均費用は $C(q)/q$ ですが、0 から q までの総費用の平均変化率は

$$\frac{C(q) - C(0)}{q} = 20 + q$$

です。固定費がある場合、原点 $(0, 0)$ は総費用曲線上にありません。したがって、原点から引く直線を「曲線上の 2 点を結ぶ割線」と捉えることはできません。

2 「追加 1 単位」と微分による近似

変化率に、増やす量を掛ける

微分可能な費用関数では、小さな増分 h について

$$C(q+h) - C(q) \approx C'(q)h = MC(q)h$$

と近似できます。 MC の単位は「金額／生産量」です。 $h=1$ としたものが、追加 1 単位の費用を $MC(q)$ で見積もる考え方です。

二次関数なら、近似のずれも計算できる

前ページの費用関数では、展開すると厳密に

$$C(q+h) - C(q) = (20+2q)h + h^2$$

となります。微分による近似では、最後の h^2 を省いています。

$q=5$ での増分 h	実際の追加費用	$MC(5)h$	差
1	31	30	1
0.1	3.01	3	0.01
0.01	0.3001	0.3	0.0001

h が小さくなると、この例では近似の相対的なずれも小さくなります。ただし、「1 単位」が十分小さいかどうかは、数量の単位や関数の曲がり方によります。

離散的な意思決定では、差を直接比較する

生産量が整数なら、 q から $q+1$ へ増やす利益の変化は

$$\Pi(q+1) - \Pi(q) = \{R(q+1) - R(q)\} - \{C(q+1) - C(q)\}$$

です。追加収入が追加費用を上回るかを、この差で判断できます。

具体例：連続モデルの解から整数の候補へ

$\Pi(q) = -q^2 + 5q$ を $q \geq 0$ で考えると、連続モデルでは $q = 2.5$ で最大です。整数に限ると、 $\Pi(2) = \Pi(3) = 6$ で、 $q = 2, 3$ が最大になります。一般の関数では、単純な四捨五入だけで最適性が保証されるわけではありません。

固定費を増やすとどうなるか

$C(q)$ に一定額 F を加えると、平均費用は F/q だけ上がりますが、限界費用は変わりません。一方、利益の水準は F だけ下がるため、生産を行うかどうかの判断には影響し得ます。

3 平均費用が最小になる条件

商の微分法則で関係を導く

$q > 0$ において、 $AC(q) = C(q)/q$ を微分すると、

$$AC'(q) = \frac{qC'(q) - C(q)}{q^2} = \boxed{\frac{MC(q) - AC(q)}{q}}.$$

分母が正なので、平均費用の増減は $MC - AC$ の符号で決まります。

比較	AC' の符号	平均費用の動き
$MC < AC$	負	下がる
$MC = AC$	0	停留点の候補
$MC > AC$	正	上がる

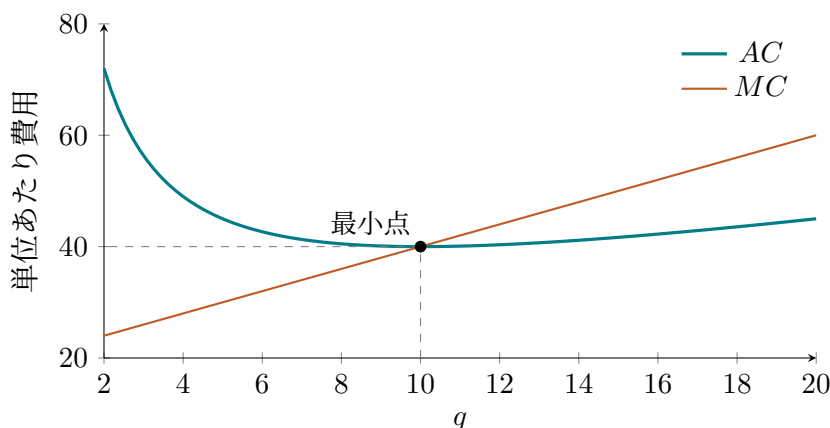
本文・問 1 の解説

$C(q) = 100 + 20q + q^2$ では、

$$MC(q) = 20 + 2q, \quad AC(q) = \frac{100}{q} + 20 + q, \quad AC'(q) = 1 - \frac{100}{q^2}.$$

$AC' = 0$ より $q = 10$ です。 $0 < q < 10$ では $AC' < 0$ 、 $q > 10$ では $AC' > 0$ なので、ここで平均費用は最小になります。

$$\boxed{AC(10) = 40 = MC(10)}.$$



一致だけでは最小とは限らない

$MC = AC$ は、微分可能な内点で平均費用が最小になるための必要条件です。最小かどうかは、前後で AC' が負から正へ変わることなどで確かめます。生産量に上限がある場合には端点も調べます。

4 限界効用の逓減を読み解く

「満足が減る」と「増える分が減る」は異なる

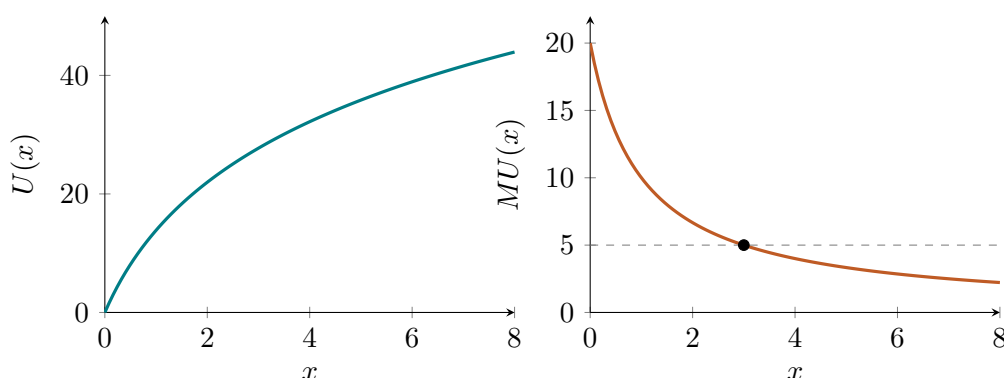
本文・問 3 の効用関数

$$U(x) = 20 \log(x+1) \quad (x \geq 0)$$

では、連鎖律から

$$MU(x) = U'(x) = \frac{20}{x+1}.$$

MU は正なので総効用は増加します。しかし、分母 $x+1$ が大きくなるため、限界効用は減少します。さらに微分すると $U''(x) = -20/(x+1)^2 < 0$ です。



左：総効用は増え続けます。右：その増え方を表す限界効用は下がります。

本文・問 3：限界効用が 5 以下となる範囲

$x+1 > 0$ なので、不等式の向きを変えずに掛け算できます。

$$\frac{20}{x+1} \leq 5 \iff 20 \leq 5(x+1) \iff \boxed{x \geq 3}.$$

追加 1 単位の効用そのものは

$$U(x+1) - U(x) = 20 \log \frac{x+2}{x+1}$$

です。例えば $x=3$ では $20 \log(5/4) \approx 4.46$ であり、 $MU(3) = 5$ とは区別します。

効用と金額をそのまま比較しない

MU は効用の変化率、 MC は費用の変化率です。単位が異なる量を直接等置することはできません。限界便益 MB と限界費用 MC を比較する際は、便益を金額で表すなど、同じ尺度にそろえます。

5 限界収入と限界費用で利益を最大にする

価格が下がる場合、限界収入は価格と異なる

収入 $R(q) = p(q)q$ を積の微分法則で微分すると、

$$MR(q) = p(q) + qp'(q).$$

$p'(q) < 0$ なら $MR(q) < p(q)$ です。全量と同じ価格 $p(q)$ で売るモデルでは、販売量を増やすための値下げが、ほかの販売分の収入にも影響します。

本文・問 2 の解説

$p(q) = 100 - 0.5q$ 、 $C(q) = 300 + 20q + 0.5q^2$ より、

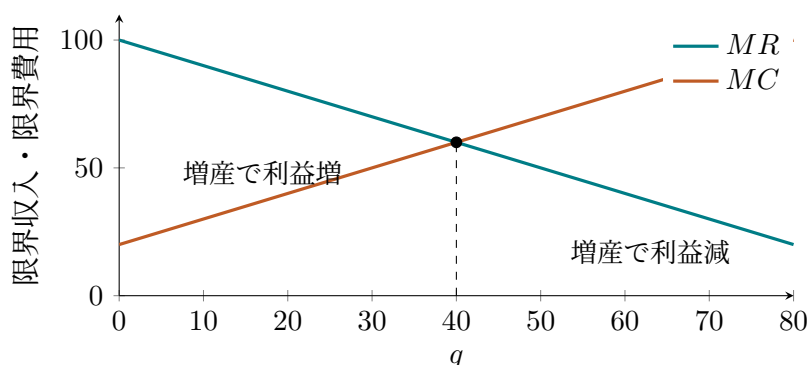
$$R(q) = 100q - 0.5q^2, \quad MR(q) = 100 - q, \quad MC(q) = 20 + q.$$

価格が非負の範囲 $0 \leq q \leq 200$ を考えます。利益は

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = -q^2 + 80q - 300 = 1300 - (q - 40)^2.$$

したがって、 $q = 40$ で**最大利益 1300** をとります。このとき、

$$p(40) = 80, \quad MR(40) = 60 = MC(40).$$



等式は候補を見つける手段

$\Pi' = MR - MC$ が正から負に変わると極大です。 $MR = MC$ でも負から正に変われば極小です。また、生産上限が $q \leq 30$ なら、この例の最大点は端点 $q = 30$ となり、 $MR = MC$ は満たしません。

本文の例 $p(x) = 100 - 2x$ 、 $C(x) = 20x + 100$ も同様です。 $MR = 100 - 4x$ 、 $MC = 20$ より $x = 20$ 、価格 60、最大利益 700 となります。

6 確認問題と解答

問題 A：平均、限界、追加費用

$C(q) = 36 + 6q + q^2$ 、 $q > 0$ とします。

1. $AC(q)$ と $MC(q)$ を求め、 $q = 3$ での値を比較せよ。
2. $q = 3$ から 4 へ増やす追加費用を求め、 $MC(3)$ との違いを説明せよ。
3. 平均費用を最小にする q と最小値を求めよ。

問題 B：一致しても最大ではない

便益 $B(x) = x^2 + 4$ 、費用 $C(x) = 4x$ 、実行可能範囲 $0 \leq x \leq 4$ を考えます。 $MB = MC$ となる点を求め、それが純便益 $B - C$ を最大にするか判定せよ。

問題 C：総効用と限界効用

$U(x) = 12 \log(x + 1)$ 、 $x \geq 0$ とします。限界効用が 3 以下となる範囲を求め、その範囲で総効用が減少するか説明せよ。

解答・解説

A(1)

$$AC(q) = \frac{36}{q} + 6 + q, \quad MC(q) = 6 + 2q.$$

$AC(3) = 21$ 、 $MC(3) = 12$ です。 $MC < AC$ なので、この付近で平均費用は下がります。

A(2) $C(4) = 76$ 、 $C(3) = 63$ なので、追加費用は 13 です。 $MC(3) = 12$ は局所的な変化率で、1 単位の増加を通じた費用の変化と完全には一致しません。

A(3) $AC'(q) = 1 - 36/q^2$ より $q = 6$ です。その前後で導関数の符号が負から正へ変わるため、最小値は $AC(6) = 18 = MC(6)$ です。

B $MB = 2x$ 、 $MC = 4$ より $x = 2$ です。しかし、

$$B(x) - C(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

なので、 $x = 2$ では最小値 0 をとります。最大値は端点 $x = 0, 4$ での 4 です。

C $MU(x) = 12/(x + 1) \leq 3$ より $x \geq 3$ です。その範囲でも $MU > 0$ なので、総効用は増加します。

解くときの確認順序

数量の範囲と単位を確認する → 総量から導関数を求める → 候補点を探す → 増減と端点を調べる。平均費用の最小化と利益の最大化は、目的の異なる問題です。