

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

変化の法則から、時間の動きを読む

解・初期条件・解法・安定性をつなぐ

1 未知なのは数ではなく、関数全体

方程式 $2x = 6$ では数 x を求めます。微分方程式 $y' = 2y$ では、各時刻の値を与える関数 $y(t)$ を求めます。「解く」と「解かどうか確認する」を区別すると理解しやすくなります。

手順	確認する内容
微分する	候補 $y(t)$ から $y'(t)$ を計算する。
代入する	定義区間のすべての t で、左右が一致するか調べる。
初期値を調べる	$y(t_0) = y_0$ が成り立つか確認する。

同じ法則にも、異なる出発点がある

$y' = 2y$ の一般解は $y = Ce^{2t}$ です。 C が変わると異なる解曲線になり、 $y(0) = 3$ を指定すると $C = 3$ に決まります。

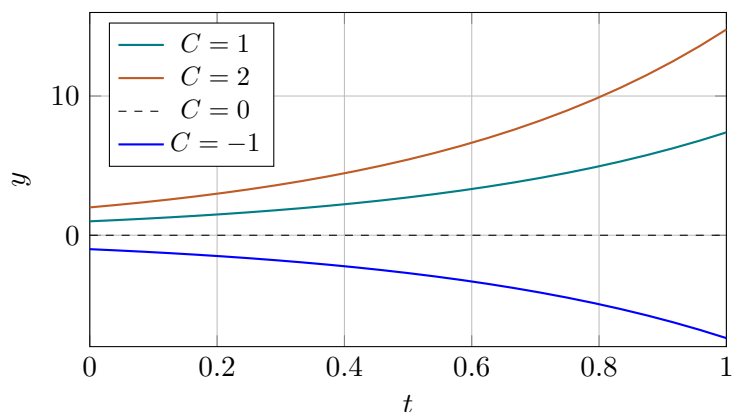


図 1：すべて $y' = 2y$ の解です。 $y > 0$ では増加し、 $y < 0$ では減少します。「係数 2 が正だから、すべての解が増える」とは限りません。

値と変化率の単位をそろえる

y が人数、 t が年なら、 y' の単位は人/年です。 $y' = ry$ の r は 1/年の単位をもちます。年ごとに 2% 増える倍率 1.02 に正確に対応する連続成長率は、 $r = \ln 1.02$ です。

2 傾きの法則から、平衡と安定性を読む

自律方程式 $y' = f(y)$ では、現在の値 y だけで傾きが決まります。 $f(y) > 0$ なら増加、 $f(y) < 0$ なら減少、 $f(y) = 0$ なら定数解の候補です。

例：一定の水準へ近づくモデル

$y' = 2 - y$ では、 $y < 2$ で増加、 $y > 2$ で減少します。解は

$$y(t) = 2 + (y_0 - 2)e^{-t}, \quad y(0) = y_0.$$

微分すると $y' = -(y_0 - 2)e^{-t} = 2 - y$ で確認できます。

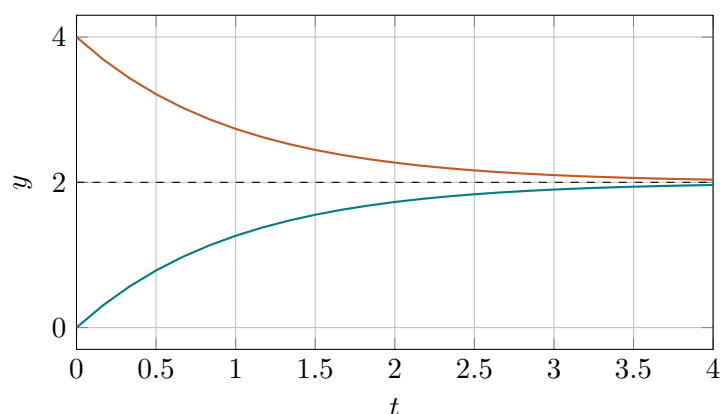


図 2：初期値 0 と 4 から出発した解が、平衡解 $y = 2$ へ近づきます。解と平衡の距離は $|y_0 - 2|e^{-t}$ です。

「安定」と「漸近安定」を区別する

安定とは、初期値を十分近くにとれば、その後も近くにとどまることです。漸近安定とは、これに加えて、十分近くから出発した解が時間とともに平衡へ収束することです。

例えば $y' = 0$ では、すべての定数が平衡解です。近くの解はずっと近くにとどまりますが、異なる初期値から特定の平衡へ近づくわけではありません。したがって各平衡は安定ですが、漸近安定ではありません。

傾きの符号を見る利点

解の公式が求められなくても、平衡の両側で傾きの符号を調べれば、解が平衡へ向かうか離れるかを判断できる場合があります。以下では一意性が成り立つ滑らかな右辺を扱います。

3 存在と一意性：定理が保証する範囲

ピカル＝リンデレフの定理は、適切な連続性とリプシッツ条件のもとで、初期値を通る解が少なくとも短時間は存在し、一意になることを保証します。解の具体式を与える定理ではありません。

リプシッツ条件を確かめる例

$f(y) = y^2$ について、 $|y_1|, |y_2| \leq M$ なら

$$|y_1^2 - y_2^2| = |y_1 - y_2||y_1 + y_2| \leq 2M|y_1 - y_2|.$$

したがって有界な範囲ではリプシッツ条件を満たします。一方、実数全体で同じ定数 L を使うことはできません。

局所的に一意でも、有限時間で発散する

初期値問題 $y' = y^2$, $y(0) = 1$ の解は

$$y(t) = \frac{1}{1-t}, \quad -\infty < t < 1.$$

$t \rightarrow 1-$ で発散するため、初期時刻 0 を含む解を $t = 1$ の先まで有限な値で延長できません。局所的な存在・一意性と矛盾しません。

連続性だけでは、一意性が失われる例

$y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ では、 $y(t) \equiv 0$ に加え、任意の $a \geq 0$ について

$$y_a(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq a), \\ (t-a)^2 & (t > a) \end{cases}$$

も解です。 $t = a$ でも左右の導関数は 0 で一致します。つまり、0 にとどまる時間を変えた複数の解があります。

この右辺は連続ですが、 $h > 0$ について

$$\frac{|2\sqrt{h} - 0|}{|h - 0|} = \frac{2}{\sqrt{h}} \rightarrow \infty$$

なので、0 の近くでリプシッツ条件を満たしません。

十分条件と必要条件を混同しない

リプシッツ条件が成立すれば一意性を保証できます。しかし、条件を確認できないことから、一意でないと結論することはできません。上の例では、実際に異なる解を示して非一意性を確認しました。

4 変数分離：割る前に、定数解を調べる

$y' = g(t)h(y)$ で $h(y) \neq 0$ なら、

$$\frac{y'(t)}{h(y(t))} = g(t)$$

です。 $H'(y) = 1/h(y)$ となる原始関数 H を取れば、合成関数の微分により左辺は $\frac{d}{dt}H(y(t))$ です。したがって

$$H(y(t)) = \int g(t) dt + C.$$

これは形式的な $dy/h(y) = g(t)dt$ という計算の根拠です。

例： $y' = ty$ の一般解

まず $y \equiv 0$ が解であることを確認します。 $y \neq 0$ の範囲では、

$$\ln |y| = \frac{t^2}{2} + C.$$

指数を取って符号と定数をまとめれば、 $y = Ae^{t^2/2}$ です。 $A = 0$ も含めると、定数解も合わせた一般解になります。初期条件 $y(0) = 1$ から $A = 1$ です。

本文・問 1： $y' = ty^2$, $y(0) = 1$

$y \neq 0$ として積分すると、

$$\int y^{-2} dy = \int t dt \implies -\frac{1}{y} = \frac{t^2}{2} + C.$$

初期条件から $C = -1$ なので、

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{1 - t^2/2}}, \quad \boxed{-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}}.$$

この区間は初期時刻 0 を含む最大の存在区間です。分母が 0 となる時刻を越えて、1 本の解として接続することはできません。

代入して検算する

$$y'(t) = \frac{t}{(1 - t^2/2)^2} = t y(t)^2, \quad y(0) = 1.$$

別に $y \equiv 0$ も微分方程式の解ですが、今回の初期条件を満たしません。

解答は「式・初期条件・存在区間」の 3 点で確認

分離の途中で除外した解を確認し、初期条件で定数を定め、最後に分母や対数の条件から、初期時刻を含む区間を確認します。

5 積分因子：積の微分を逆向きに使う

$y' + p(t)y = q(t)$ では、左辺全体を何かの微分に変えたいと考えます。 p, q は考えている区間で連続とします。

$P'(t) = p(t)$ となる原始関数を 1 つ選び、 $\mu = e^P$ とおけば $\mu' = p\mu$ 。よって

$$(\mu y)' = \mu y' + \mu' y = \mu(y' + p y) = \mu q.$$

積分して μ で割ると、本文の一般解の公式になります。 μ は常に正なので割ることができます。

本文・問 2: $y' + 2y = e^{-t}$

積分因子は $\mu = e^{2t}$ です。両辺に掛けると

$$(e^{2t}y)' = e^t.$$

積分して $e^{2t}y = e^t + C$ より、

$$y(t) = e^{-t} + Ce^{-2t}.$$

検算すると、 $y' = -e^{-t} - 2Ce^{-2t}$ なので、 $y' + 2y = e^{-t}$ です。もし $y(0) = 3$ も指定されたなら、 $1 + C = 3$ より $C = 2$ です。

同次解と、特解の役割

この例の Ce^{-2t} は外部入力を 0 にした方程式 $y' + 2y = 0$ の解です。 e^{-t} は入力 e^{-t} に対応する特解です。一般解は「特解+同次方程式の一般解」として理解できます。

1 階であることと、線形であることは別

$y' = ty^2$ は 1 階ですが、 y の二乗を含むため線形ではありません。一方、 $y' + t^2y = \sin t$ は係数が t の二乗でも、未知関数 y と y' に関して線形です。

初期値をそのまま組み込む形【発展】

$\mu(t) = \exp(\int_{t_0}^t p(s) ds)$ とすれば $\mu(t_0) = 1$ なので、

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^t \mu(s)q(s) ds \right).$$

この形では積分定数を後から決める必要がなく、 $t = t_0$ を代入すると初期条件が直ちに確認できます。

6 2 階方程式：なぜ特性方程式を考えるのか

$ay'' + by' + cy = 0$ に $y = e^{rt}$ を代入すると、

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0.$$

$e^{rt} \neq 0$ なので、 $ar^2 + br + c = 0$ を満たす r が見つければ解が得られます。線形同次方程式では解の定数倍と和も解です。

本文・問 3： $y'' - 3y' + 2y = 0$

特性方程式は $r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2) = 0$ 。よって

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}.$$

2 階では通常、初期位置と初期速度に当たる 2 条件を指定します。例えば $y(0) = 1, y'(0) = 0$ なら、

$$C_1 + C_2 = 1, \quad C_1 + 2C_2 = 0$$

より $C_1 = 2, C_2 = -1$ です。

重解で te^{rt} が現れる理由

特性方程式が重解 r をもつと、方程式は $y'' - 2ry' + r^2y = 0$ と書けます。 $y = e^{rt}v$ を代入すれば $e^{rt}v'' = 0$ 。したがって $v = C_1 + C_2t$ であり、 $y = (C_1 + C_2t)e^{rt}$ を得ます。

複素根は、必ずしも周期運動を意味しない

根が $\alpha \pm i\beta$ なら、実数解は

$$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t).$$

$\alpha = 0$ なら非零解は周期的ですが、 $\alpha < 0$ なら振幅が減衰し、 $\alpha > 0$ なら増大します。三角関数を含んでも、解全体が周期関数とは限りません。

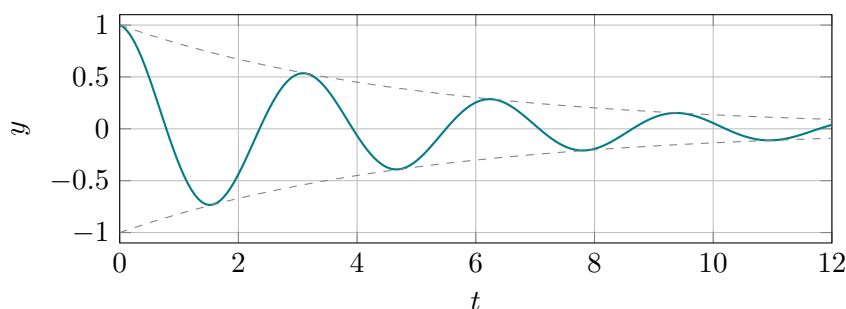


図 3： $e^{-0.2t} \cos 2t$ と包絡線 $\pm e^{-0.2t}$ 。振動しながら振幅が小さくなります。

7 本文・問 4：符号表から安定性を判定する

$y' = y(4 - y)$ の平衡は $y(4 - y) = 0$ より $y = 0, y = 4$ です。

y	$y < 0$	0	$0 < y < 4$	4	$y > 4$
$y(4 - y)$	-	0	+	0	-
時間とともに	減少	一定	増加	一定	減少

0 の左ではさらに小さく、右では大きくなるので、 0 は不安定 です。4 の両側では 4 へ向かうので、 4 は漸近安定 です。人口モデルとして $y \geq 0$ に制限しても、正の小さな初期値が 0 から離れるため、0 は不安定です。

正の初期値に対する解で確認する

$y(0) = y_0 > 0$ に対する解は

$$y(t) = \frac{4}{1 + (4/y_0 - 1)e^{-4t}} \quad (t \geq 0).$$

$t \rightarrow \infty$ で $e^{-4t} \rightarrow 0$ なので、 $y(t) \rightarrow 4$ です。 $y_0 = 4$ なら定数解 4 となります。 $y_0 = 0$ は、この式へ代入せず別に $y \equiv 0$ とします。

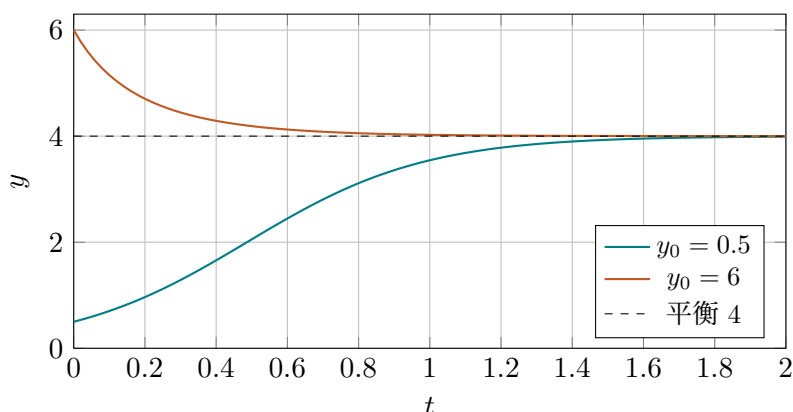


図 4：平衡の下からは増加、上からは減少して 4 へ近づきます。

傾きと値を区別する

$y' = 0$ は「値が 0」という意味ではなく、「その状態では値が変化しない」という意味です。この例では $y = 4$ でも傾きは 0 になります。

8 追加問題と解答

問 1 $y' = 3y$, $y(0) = 2$ を解き、微分して確認せよ。

問 2 $y' = -2(y - 5)$ の平衡と安定性を求め、 $y(0) = 1$ の解を求めよ。

問 3 $y' = y^2$, $y(0) = 2$ の解と、初期時刻を含む最大の存在区間を求めよ。

問 4 $y' + y = 2$, $y(0) = 0$ を積分因子で解け。

問 5 $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ を解き、周期を求めよ。

問 6 $y'' + 2y' + y = 0$ の一般解を求めよ。

解答・解説

1. $y = 2e^{3t}$ 。 $y' = 6e^{3t} = 3y$, $y(0) = 2$ 。
2. 平衡は 5 で、下では増加、上では減少するため漸近安定。 $y = 5 - 4e^{-2t}$ 。
3. $-1/y = t + C$ 、初期条件から $C = -1/2$ 。したがって $y = 2/(1 - 2t)$ 、区間は $(-\infty, 1/2)$ 。
4. 積分因子 e^t を掛けると $(e^t y)' = 2e^t$ 。一般解 $y = 2 + Ce^{-t}$ に初期条件を入れ、 $y = 2 - 2e^{-t}$ 。
5. 特性根は $\pm 2i$ 。 $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$ に初期条件を入れると $y = \cos 2t$ 、周期は π 。
6. 特性方程式は $(r + 1)^2 = 0$ なので、 $y = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$ 。

解法を選ぶための短い見取り図

形	最初に試す方法
$y' = g(t)h(y)$	定数解を確認し、変数分離する。
$y' + p(t)y = q(t)$	積分因子で積の微分にする。
$ay'' + by' + cy = 0$	特性方程式の根を調べる。
$y' = f(y)$ の長期挙動	平衡と、前後の符号を調べる。

講義で押さえること

微分方程式は変化率の法則であり、初期条件と合わせて時間発展を決めます。求めた式は微分・代入して確認し、存在区間も明記します。解の公式だけでなく、傾きの符号から動きを読むことも重要です。