

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

同じ割合で変わる量を捉える

指数成長・指数減衰・観測値からの予測

1 一定なのは「増加量」か「割合」か

線形成長 $y' = v$ では、単位時間当たりの増加量 v が一定です。指数成長 $y' = ky$ では、 $y > 0$ として

$$\frac{y'}{y} = k$$

という相対的な変化率が一定です。量が 2 倍になれば、瞬間の増加速度も 2 倍になります。

	線形成長	指数成長
変化の法則	$y' = 20$	$y' = 0.2y$
初期値 100 の解	$100 + 20t$	$100e^{0.2t}$
$t = 0$ での増加速度	20	20
$t = 5$ での量	200	約 271.83
$t = 5$ での増加速度	20	約 54.37

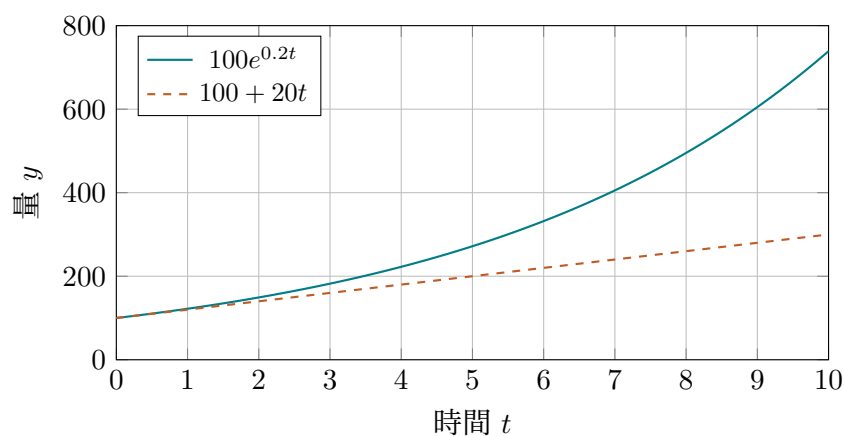


図 1：初期値と初期の傾きをそろえた比較です。指数モデルの増加速度は、時間とともに大きくなります。

単位と初期値の符号を確認する

t が年なら k の単位は 1/年、 v は量/年です。同じ記号で表しても、この 2 種類の係数は意味が異なります。本ノートでは数量モデルとして $y_0 > 0$ を扱います。 $y_0 = 0$ なら常に 0 であり、負の初期値では増減の解釈が変わります。

2 解の導出と「一定倍率」の性質

本文では変数分離で解を求めました。ここでは、 y で割らずに零解も含めて導きます。

積の微分から、すべての解を求める

$y' = ky$ なら、

$$\frac{d}{dt}(e^{-kt}y) = e^{-kt}(y' - ky) = 0.$$

したがって $e^{-kt}y = C$ であり、 $y = Ce^{kt}$ です。初期条件 $y(t_0) = y_0$ を入れると、

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}.$$

微分して $y' = ky$ 、 $t = t_0$ を代入して $y(t_0) = y_0$ が確認できます。定数 k の場合、この解はすべての実数 t で定義されます。

同じ時間幅では、同じ倍率になる

$y_0 > 0$ なら、任意の時間幅 h について

$$\frac{y(t+h)}{y(t)} = e^{kh}, \quad \frac{y(t+h) - y(t)}{y(t)} = e^{kh} - 1.$$

右辺は出発時刻 t に依存しません。これが、連続時間の指数モデルと、離散時間の等比数列とのつながりです。

連続成長率と、1 期間の増加率

1 期間の倍率を a 、増加率を $g = a - 1$ とすれば、

$$a = e^k, \quad g = e^k - 1, \quad k = \ln(1 + g).$$

年ごとに 5% 増えるなら $g = 0.05$ 、 $k = \ln 1.05 \approx 0.04879$ です。一方、 $k = 0.05$ なら年間増加率は $e^{0.05} - 1 \approx 5.127\%$ です。

短い時間で使う近似

$|kh|$ が小さいときは $e^{kh} \approx 1 + kh$ なので、 $y(t+h) \approx y(t) + kh y(t)$ です。これは瞬間の変化率を短時間の増加量へ変換する近似であり、長い期間で常に正確な式ではありません。

「成長」のグラフは下に凸

$y'' = k^2 y$ なので、 $y > 0$ かつ $k \neq 0$ なら $y'' > 0$ です。指数減衰も下に凸であり、量が減るにつれて減少速度の絶対値は小さくなります。

3 倍加時間と半減期：量によらない時間

倍加時間の導出

$k > 0$ として、 $y(t+T) = 2y(t)$ を満たす時間 T を求めます。一定倍率の性質から $e^{kT} = 2$ なので、

$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$

100 から 200 になる時間も、200 から 400 になる時間も同じです。例えば $k = 0.1$ なら $T \approx 6.931$ です。

半減期の導出と、符号の約束

減衰を $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$ 、 $\lambda > 0$ と書けば、 $e^{-\lambda H} = 1/2$ より

$$H = \frac{\ln 2}{\lambda}, \quad \frac{A(t)}{A_0} = 2^{-t/H}.$$

本文の間 2 ではこの正の減衰係数を k と書いています。基本式 $y' = ky$ の負の係数と区別すると、符号の混乱を防げます。

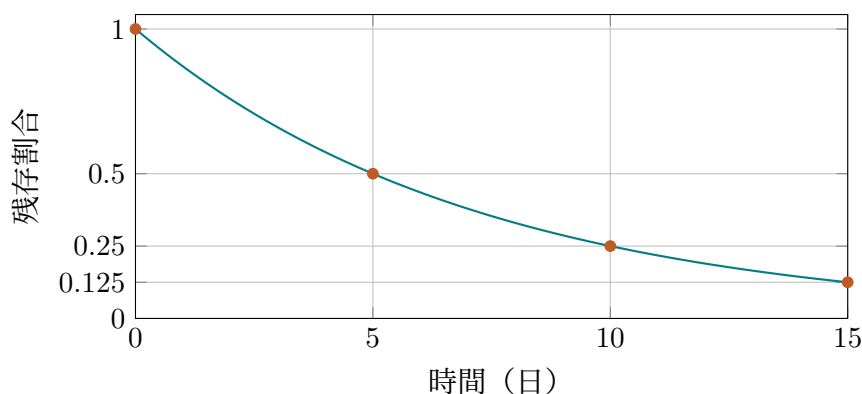


図 2：半減期 5 日の減衰。5 日ごとに割合が半分になりますが、減る量そのものは同じではありません。

有限時間では、厳密には 0 にならない

$A_0 > 0$ なら有限の t で $A(t) > 0$ です。「十分小さくなる時刻」を求めるには、しきい値を決めます。例えば初期量の 1% になる時刻は $t = H \ln 100 / \ln 2 \approx 6.644H$ です。

4 観測値からモデルを決める

異なる時刻 $t_1 < t_2$ で、正の観測値 y_1, y_2 が得られたとします。一定係数の指数モデルを仮定すれば、

$$\frac{y_2}{y_1} = e^{k(t_2 - t_1)} \implies k = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{t_2 - t_1}.$$

k は「対数を取った値の平均変化率」です。

本文の例：500 から 10 年で 800 へ

$k = \ln(800/500)/10 = \ln 1.6/10 \approx 0.04700$ 。10 年間の倍率が 1.6 なので、同じモデルが続けば 20 年後は $500(1.6)^2 = 1280$ です。年間増加率は $1.6^{1/10} - 1 \approx 4.812\%$ です。

3 点目は、仮定を確認する手がかりになる

等間隔の観測値が指数モデルに完全に従うなら、隣り合う比が一致します。例えば 100, 128, 170 では

$$\frac{128}{100} = 1.28, \quad \frac{170}{128} = 1.328125$$

と異なるため、一定の k をもつ指数曲線が 3 点をすべて正確に通ることはありません。

平均倍率は、積から求める

2 年間の総倍率が 1.70 なら、同じ倍率 a を 2 回掛けて 1.70 にすることから、 $a^2 = 1.70$ 、 $a = \sqrt{1.70}$ です。一般に n 期間の平均倍率は

$$a = \left(\frac{y_n}{y_0} \right)^{1/n}.$$

各期間の倍率の幾何平均に一致します。例えば 2 倍になった翌年に半分になれば、平均倍率は $\sqrt{2 \cdot 0.5} = 1$ です。倍率の算術平均 1.25 を使うと、実際には存在しない増加を表してしまいます。

2 点に合うことと、将来も続くことは別

正の 2 点には指数モデルを合わせられますが、それだけでは一定の成長率を検証できません。資源、人口、市場規模などの制約が強くなれば、成長率が変わることがあります。予測は、一定の成長率が続くという仮定に基づきます。

5 本文の練習問題：解答と解説

問 1：成長率と、1000 に達する時刻

$y(t) = 500e^{rt}$ に $y(4) = 900$ を代入すると、 $e^{4r} = 1.8$ 。したがって

$$r = \frac{\ln 1.8}{4} \approx 0.146947 \quad (1/\text{年}) .$$

1000 は初期人口の 2 倍なので、 $500e^{rt} = 1000$ を解いて

$$t = \frac{\ln 2}{r} = \frac{4 \ln 2}{\ln 1.8} \approx 4.717 \text{年} .$$

$r \approx 0.146947$ を、年間 14.6947% 増と読むのは正確ではありません。年間増加率は $e^r - 1 = 1.8^{1/4} - 1 \approx 15.83\%$ です。

問 2：半減期 5 日から残存割合へ

$A(5) = A_0/2$ より、 $e^{-5k} = 1/2$ 。よって

$$k = \frac{\ln 2}{5} \approx 0.138629 \quad (1/\text{日}) .$$

12 日後の割合は、

$$\frac{A(12)}{A_0} = e^{-12k} = 2^{-12/5} \approx 0.189465 .$$

つまり約 18.95% 残ります。10 日後の 25% と 15 日後の 12.5% の間にあり、図 2 ととも整合します。

問 3：2 年間の平均倍率による予測

各年の増加率は

$$\frac{128 - 100}{100} = \boxed{28\%}, \quad \frac{170 - 128}{128} = \boxed{32.8125\%} .$$

2 年間の平均倍率を $\sqrt{1.70} \approx 1.30384$ とすると、平均的な年間増加率は約 30.384% です。この倍率がもう 1 年続くと仮定すれば、

$$y(3) = 170\sqrt{1.70} \approx 221.653 .$$

予測方法を明記する

ここでは 0 年目と 2 年目を結ぶ平均倍率を使っています。直近 1 年の倍率をそのまま使う予測は $170(170/128) = 225.78125$ となります。どちらも仮定に依存し、この 3 点だけから将来の値は一意に決まりません。

6 追加問題と解答

問 1 $y' = 0.3y$, $y(0) = 200$ の解を求めよ。また、 $y'(0)$ を求めよ。

問 2 毎年 10% ずつ増える量を連続時間の指数モデルで表すとき、 k を求めよ。

問 3 3 時間ごとに 2 倍になる量がある。初期量 80 のとき、9 時間後の量と k を求めよ。

問 4 半減期 4 日の量が初期量の $1/8$ になる時刻を求めよ。

問 5 $y(2) = 30$, $y(5) = 60$ を満たす指数モデルを求めよ。

問 6 2 年間で 100 から 144 へ増えた。平均年間倍率と平均年間増加率を求めよ。

解答・解説

1. $y = 200e^{0.3t}$ 、 $y'(0) = 0.3 \cdot 200 = 60$ 。初期の増加速度は、初期量とは異なる。
2. 年を時間単位とすると、 $e^k = 1.10$ より $k = \ln 1.10 \approx 0.09531$ 。
3. $y(9) = 80 \cdot 2^3 = 640$ 。 $k = \ln 2/3$ (1/時間)。
4. $1/8 = (1/2)^3$ なので、半減期 3 回分の 12 日。
5. 時間幅 3 で 2 倍になるので、 $k = \ln 2/3$ 。時刻 2 を基準にして $y(t) = 30e^{(\ln 2)(t-2)/3}$ 。
6. 平均倍率は $\sqrt{144/100} = 1.2$ 、平均年間増加率は 20% 。

計算前に確認する 4 つの量

初期量	y_0
連続成長率	k (時間の逆数の単位)
時間幅 h での倍率	e^{kh}
時間幅 h での増加率	$e^{kh} - 1$

講義で押さえること

指数モデルは、現在量に対する瞬間の変化率が一定のモデルです。同じ時間幅では同じ倍率になり、倍加時間や半減期は初期量によらず決まります。観測値から求めた率と、将来もその率が続くという仮定は区別します。