

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

成長の勢いと、上限までの余裕

ロジスティック方程式を式と図から理解する

1 指数成長に、抑制の仕組みを加える

以下では $r > 0, K > 0$ とし、時間 $t \geq 0$ を考えます。

$$y' = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) = ry - \frac{r}{K}y^2.$$

指数成長 ry から、規模の二乗に比例する抑制分 $(r/K)y^2$ を差し引いた形です。 $y > 0$ なら、1 個体・1 単位当たりの相対的な変化率は

$$\frac{y'}{y} = r \left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

です。指数モデルでは一定だった相対成長率が、規模 y に応じて小さくなります。

現在量	$0.1K$	$0.5K$	$0.9K$
抑制係数 $1 - y/K$	0.9	0.5	0.1
相対成長率 y'/y	$0.9r$	$0.5r$	$0.1r$
増加速度 y'	$0.09rK$	$0.25rK$	$0.09rK$

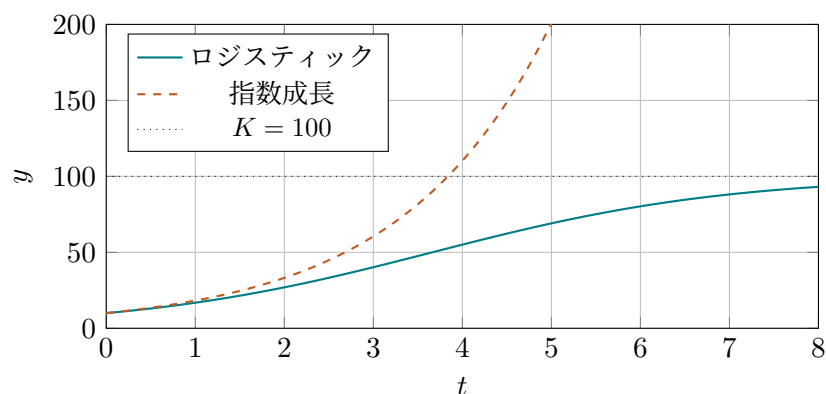


図 1：ともに $y_0 = 10, r = 0.6$ 。指数成長は表示範囲を越えて増加します。ロジスティック成長は早い段階から抑制を受け、 K へ近づきます。

増加速度と、相対成長率を区別する

相対成長率は y が増えるほど低下しますが、増加速度 y' は最初から低下するとは限りません。規模の大きさと、残された余裕の積によって決まります。

2 解の導出：部分分数と対数を使う

まず $y \equiv 0$ と $y \equiv K$ が定数解であることを確認します。次に $0 < y < K$ の範囲で変数分離すると、

$$\frac{K}{y(K-y)} dy = r dt.$$

ここで部分分数分解

$$\frac{K}{y(K-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}$$

を使います。積分では $K-y$ の微分が -1 であることに注意して、

$$\ln y - \ln(K-y) = rt + C.$$

したがって $y/(K-y) = Be^{rt}$ 。初期値 $y(0) = y_0$ から $B = y_0/(K-y_0)$ を代入して整理すると、

$$\boxed{y(t) = \frac{K}{1 + ae^{-rt}}}, \quad \boxed{a = \frac{K - y_0}{y_0}}.$$

公式を代入して検算する

$q = ae^{-rt}$ とおくと $q' = -rq$ なので、

$$y' = \frac{rKq}{(1+q)^2}.$$

一方、

$$ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) = r \frac{K}{1+q} \frac{q}{1+q} = \frac{rKq}{(1+q)^2}.$$

また $y(0) = K/(1+a) = y_0$ です。この確認により、 $y_0 = K$ や $y_0 > K$ でも、同じ公式が $t \geq 0$ の解を与えることが分かります。 $y_0 > 0$ なら $a > -1$ であり、この範囲で分母は正です。

導出の途中で除いた解を戻す

$y_0 = K$ なら $a = 0$ で定数解 K になります。 $y_0 = 0$ は a の式へ代入できないため、別に $y(t) \equiv 0$ とします。 y や $K-y$ で割る計算だけでは、これらを見落とすことがあります。

補足： $y_0 > K$ の解も将来の全時刻で存在しますが、過去へ延長すると有限時刻で発散します。ここでは初期時刻以後の成長・減衰を扱っています。

3 最大増加速度と変曲点は、なぜ一致するか

増加速度を現在量の関数 $F(y)$ と見ると、平方完成により

$$F(y) = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) = \frac{rK}{4} - \frac{r}{K} \left(y - \frac{K}{2}\right)^2.$$

したがって、 $y = K/2$ で $F(y) = rK/4$ が最大です。

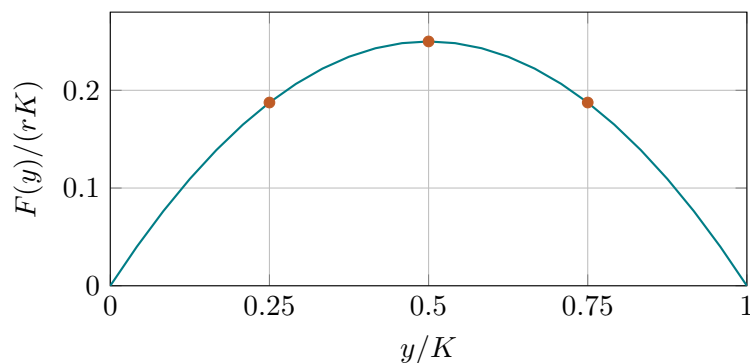


図 2：横軸は時間ではなく現在量です。 $K/2$ から等距離の 2 つの量では、増加速度が等しくなります。

解曲線の凹凸は、もう一度微分して確かめる

連鎖律を使うと、

$$y'' = F'(y)y' = r \left(1 - \frac{2y}{K}\right) y'.$$

$0 < y < K$ では $y' > 0$ なので、 $y < K/2$ なら $y'' > 0$ 、 $y > K/2$ なら $y'' < 0$ です。 $K/2$ を通ると凹凸が変わり、そこで傾き y' が最大になります。

変曲点に達する時刻

$0 < y_0 < K$ として $y(t_*) = K/2$ を解くと、 $ae^{-rt_*} = 1$ より

$$t_* = \frac{1}{r} \ln \frac{K - y_0}{y_0}.$$

$y_0 < K/2$ なら $t_* > 0$ です。 $y_0 = K/2$ なら開始時刻が変曲点、 $y_0 > K/2$ なら変曲点は過去にあり、 $t \geq 0$ では増加速度が低下する部分だけを観測します。

「S 字形」には初期値と観測範囲が関係する

$0 < y_0 < K/2$ なら、観測開始後に加速から減速へ移る様子が見えます。すべての正の初期値で、将来に S 字形全体が現れるわけではありません。

4 環境収容力は、解を引き寄せる平衡

$y' = F(y)$ の符号を調べれば、公式を使わずに増減が分かります。

y	$y < 0$	0	$0 < y < K$	K	$y > K$
$F(y)$	−	0	+	0	−

正の初期値では、 K より下からは増加し、上からは減少します。 K は漸近安定な平衡、 0 は不安定な平衡です。

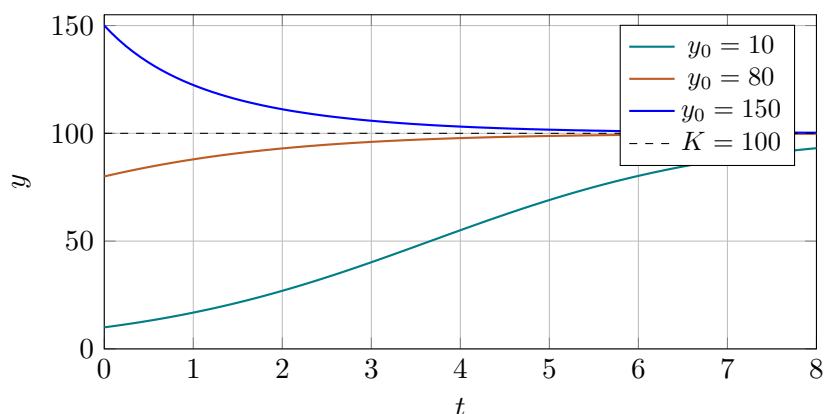


図 3：同じ $r = 0.6$, $K = 100$ でも、初期値により増加・減少や凹凸が異なります。

K は常に越えられない上限なのか

$0 < y_0 < K$ なら、解は K を越えずに下から近づきます。しかし、 $y_0 > K$ を与えること自体は数学的に可能で、上から K へ近づきます。したがって K は、すべての初期値に対する絶対的な上限ではなく、長期的な平衡水準です。

飽和に達するには、どれくらいかかるか

$0 < y_0 < K$ なら有限時間で厳密に K には到達しません。目標を $y = pK$, $y_0/K < p < 1$ とすれば、

$$t = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{ap}{1-p} \right).$$

目標を 90%、99% のように指定することで、具体的な到達時刻を求められます。

モデルの仮定を確認する

ここでは r, K を一定としています。資源や市場条件が変われば、それらも変わり得ます。また、上限のあるデータがすべてロジスティック曲線に従うわけではありません。特に学習精度の飽和は、この式の成立をそれだけで保証しません。

5 本文の練習問題：解答と解説

問 1：初期値から a と変曲時刻を求める

$r = 0.4, K = 1000, y_0 = 100$ なので、

$$a = \frac{1000 - 100}{100} = 9, \quad y(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.4t}}.$$

変曲点では $y = 500$ なので、 $9e^{-0.4t} = 1$ 。したがって

$$t_* = \frac{\ln 9}{0.4} \approx 5.493.$$

時間単位は t の定義に従います。このときの最大増加速度は $0.4 \cdot 1000/4 = 100$ です。初期の増加速度は $0.4 \cdot 100 \cdot 0.9 = 36$ であり、その後 100 まで増えてから低下します。

問 2：対称性と最大値

ここでの a は問 1 の定数とは別に、 $0 < a < 1$ の割合を表します。

$$F(aK) = r(aK)(1 - a) = rKa(1 - a),$$

$$F((1 - a)K) = r(1 - a)K\{1 - (1 - a)\} = rKa(1 - a).$$

よって両者は等しくなります。また、

$$F(y) = \frac{rK}{4} - \frac{r}{K} \left(y - \frac{K}{2}\right)^2 \leq \frac{rK}{4}$$

より、最大値は $F(K/2) = rK/4$ です。

問 3：定数解と符号

$y = 0$ および $y = K$ では右辺が 0 になり、左辺も定数の微分なので 0 です。したがって両方とも定数解です。

- $0 < y < K$: $ry > 0$ 、 $1 - y/K > 0$ なので、 $y' > 0$ 。解は増加します。
- $y > K$: $ry > 0$ 、 $1 - y/K < 0$ なので、 $y' < 0$ 。解は減少します。

同じ増加速度でも、相対成長率は異なる

$y = 0.2K$ と $y = 0.8K$ では増加速度は同じ $0.16rK$ ですが、相対成長率はそれぞれ $0.8r$ と $0.2r$ です。絶対量の増加と割合の増加を分けて考えます。

6 追加問題と解答

問 1 $r = 0.5, K = 200, y_0 = 20$ のとき、解と最大増加速度を求めよ。

問 2 問 1 の解が K の 90% に達する時刻を求めよ。

問 3 $r = 1, K = 100, y_0 = 80$ の解は、 $t \geq 0$ で加速する部分をもつか。

問 4 $r = 1, K = 100, y_0 = 150$ の解の増減と極限を答えよ。

問 5 $x = y/K, \tau = rt$ とおくと、方程式が $dx/d\tau = x(1-x)$ になることを示せ。

問 6 $0 < y < K$ で $z = \ln\{y/(K-y)\}$ とおく。 z を時間の式で表せ。

解答・解説

1. $a = 9$ より $y = 200/(1 + 9e^{-0.5t})$ 。最大増加速度は $rK/4 = 25$ 。
2. $p = 0.9$ より $t = \ln 81/0.5 \approx 8.789$ 。
3. 初期値が $K/2 = 50$ より大きいので、将来は常に $y'' < 0$ 。増加はするが、増加速度は低下する。変曲時刻は $\ln(1/4) < 0$ 。
4. $y_0 > K$ なので減少し、 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 100$ 。 $y(t) = 100/(1 - e^{-t}/3)$ で確認できる。
5. $dy/dt = Kr dx/d\tau$ を代入して Kr で割れば、 $dx/d\tau = x(1-x)$ 。 K は量の尺度、 $1/r$ は時間の尺度を決める。
6. 解の導出から $z = rt + \ln\{y_0/(K - y_0)\}$ 。 K が既知で、正確にロジスティックモデルに従うデータなら、この変換後は直線になる。

講義で押さえる 4 点

成長は「規模」と「上限までの余裕」の積で決まる。増加速度は $K/2$ で最大になる。初期値によって観測される曲線の形が変わる。正の初期値からの解は将来 K に近づく。