

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

2 つの量の増減を、同時に読む

ロトカ・ヴォルテラ方程式と相平面

1 相互作用は、相手の個体数で成長率を変える

 x を被食者、 y を捕食者として、正の定数 $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ を用いると、

$$x' = x(\alpha - \beta y), \quad y' = y(\delta x - \gamma).$$

正の領域では、1 個体当たりの相対成長率が

$$\frac{x'}{x} = \alpha - \beta y, \quad \frac{y'}{y} = \delta x - \gamma$$

となります。被食者の相対成長率は捕食者数で、捕食者の相対成長率は被食者数で決まります。

積 xy が現れる理由

被食者と捕食者の組は xy 組あります。一様に混ざり合い、各組が一定の割合で遭遇するなら、遭遇数は xy に比例すると近似できます。両者をともに 2 倍にすれば、この近似のもとで遭遇数は 4 倍になります。

捕食による減少と増加は、同じ数ではない

被食者の減少係数 β と捕食者の増加係数 δ は別です。捕食した餌がどれだけ捕食者の増殖につながるかは、単位の取り方や増殖効率に依存します。このモデルで $x + y$ が保存されるわけではありません。

相手がいないときの挙動から、仮定が見える

条件	残る式	モデルの仮定
捕食者なし： $y = 0$	$x' = \alpha x$	被食者は資源制約なしに指数成長する。
被食者なし： $x = 0$	$y' = -\gamma y$	捕食者は代替食料なしに指数減衰する。

正の個体数は正のまま

解が存在する範囲で、例えば

$$x(t) = x(0) \exp \left(\int_0^t (\alpha - \beta y(s)) ds \right)$$

です。 $x(0) > 0$ なら $x(t) > 0$ であり、 y も同様です。決定論的なこのモデルは、少数個体で起こる偶然の絶滅を直接表すものではありません。

2 ヌルクラインは「片方の傾きが 0」の場所

$x' = 0$ となる集合は $x = 0$ または $y = \alpha/\beta$ 、 $y' = 0$ となる集合は $y = 0$ または $x = \gamma/\delta$ です。両方を同時に満たす平衡点は

$$(0, 0), \quad (x_*, y_*) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

正の領域での 4 通りの増減

領域	x'	y'	軌道の向き
$x > x_*, y < y_*$	+	+	右上
$x > x_*, y > y_*$	-	+	左上
$x < x_*, y > y_*$	-	-	左下
$x < x_*, y < y_*$	+	-	右下

この順に領域を通るため、正の平衡点の周りを反時計回りに進みます。

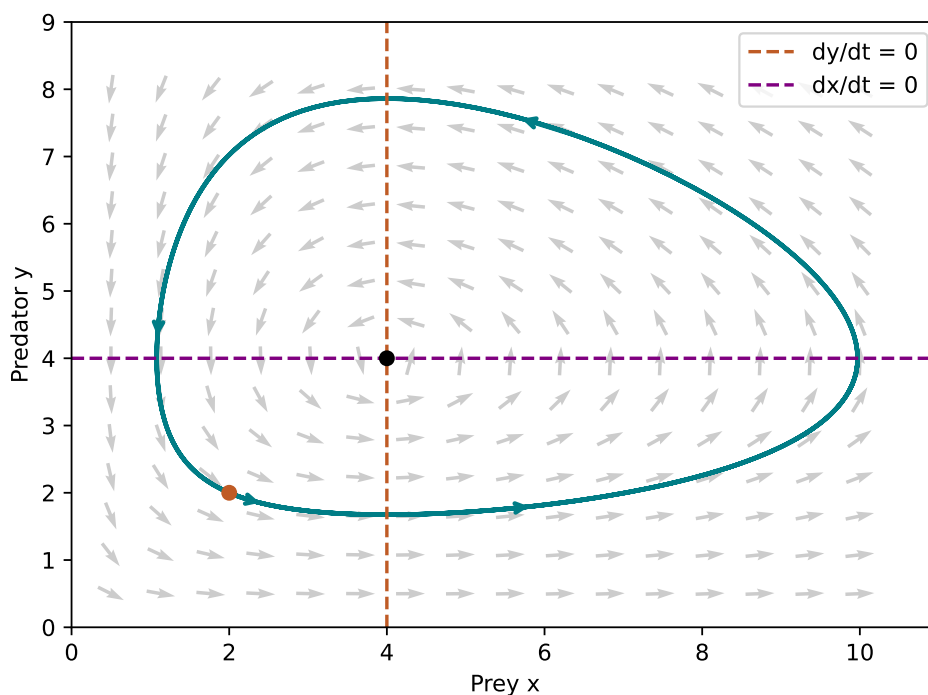


図 1 : $\alpha = 2, \beta = 0.5, \delta = 0.25, \gamma = 1$ 、初期値 $(2, 2)$ の数値解。黒点が平衡 $(4, 4)$ 、橙点が初期値です。矢印は向きを見やすくするため長さをそろえてあり、速度の大きさは表していません。

ヌルクライン上でも、点は動く

$y = y_*$ では $x' = 0$ ですが、通常は $y' \neq 0$ なので縦に動きます。 $x = x_*$ では $y' = 0$ なので横に動きます。両ヌルクラインの交点で初めて、両方の動きが止まります。

3 なぜ捕食者のピークは後から来るのか

時系列グラフは、横軸を時間として $x(t), y(t)$ を別々に描きます。相平面は、同じ時刻の組 $(x(t), y(t))$ を 1 点として描きます。両者は同じ運動の異なる見方です。

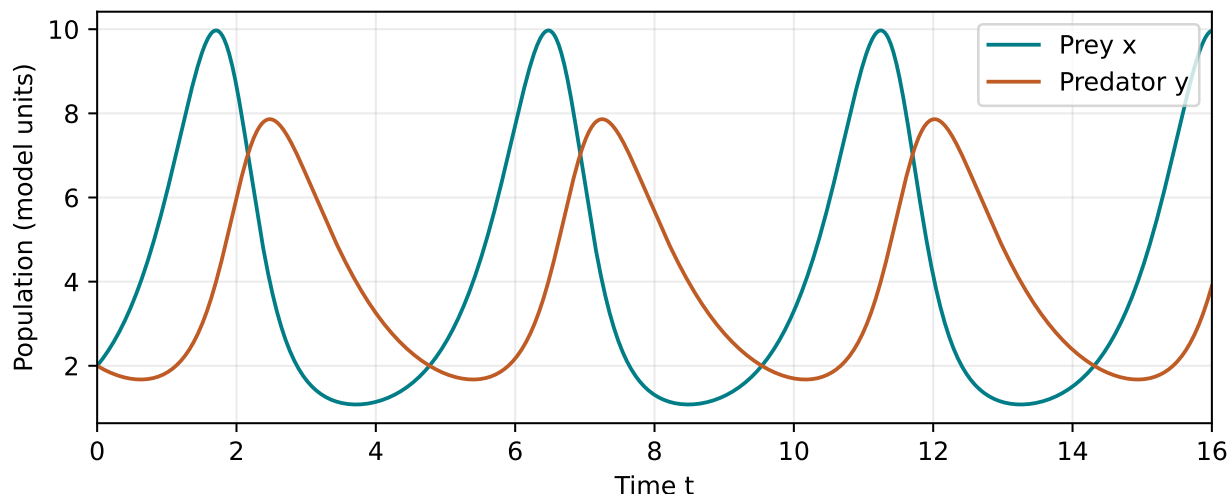


図 2：図 1 と同じ数値解。青緑が被食者 x 、橙が捕食者 y です。数値計算には適応刻み幅の方法を使い、保存量のずれは計算区間で 7×10^{-10} 未満でした。これは架空のパラメータによるモデルの例です。

1 周を、4 つの転換点で追う

1. $x > x_*, y = y_*$ を上向きに通過すると、 x' が正から負へ変わり、**被食者が最大**になります。このとき $y' > 0$ で、捕食者はまだ増えています。
2. その後、 $x = x_*, y > y_*$ を左向きに通過すると、 y' が正から負へ変わり、**捕食者が最大**になります。
3. $x < x_*, y = y_*$ を下向きに通過すると、 x' が負から正へ変わり、**被食者が最小**になります。
4. $x = x_*, y < y_*$ を右向きに通過すると、 y' が負から正へ変わり、**捕食者が最小**になります。

最大になる個体数は、ヌルクラインの値とは違う

被食者 x が最大になるのは、捕食者 y が y_* を通るときです。 x 自身が x_* のときに最大になるわけではありません。逆に、捕食者の最大は $x = x_*$ を通るときです。

ピークの遅れは、この連立方程式の相互作用から生じます。2 つの曲線が常に正弦波になる、あるいはピーク間隔がいつも周期の 4 分の 1 になる、という意味ではありません。

4 閉軌道を支える保存量【発展】

正の平衡点を (x_*, y_*) とし、正の領域で

$$H(x, y) = \delta \left(x - x_* - x_* \ln \frac{x}{x_*} \right) + \beta \left(y - y_* - y_* \ln \frac{y}{y_*} \right)$$

とおきます。対数の中を比にしてあるため、個体数の単位によらず意味をもつ形です。

解に沿って微分すると 0 になる

$\delta x_* = \gamma, \beta y_* = \alpha$ より、

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \left(\delta - \frac{\gamma}{x} \right) x' + \left(\beta - \frac{\alpha}{y} \right) y' \\ &= (\delta x - \gamma)(\alpha - \beta y) + (\beta y - \alpha)(\delta x - \gamma) = 0. \end{aligned}$$

したがって、初期値で決まる H の値が、時間とともに変わりません。

保存量から閉軌道を理解する

$u - 1 - \ln u \geq 0$ ($u > 0$ 、等号は $u = 1$) なので、 $H \geq 0$ であり、 $H = 0$ となるのは平衡点だけです。さらに

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\gamma}{x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\alpha}{y^2} > 0$$

で、混合微分は 0 です。 H は狭義凸で、軸へ近づくときも無限遠へ進むときも大きくなります。そのため、 $H = c > 0$ の等高線は平衡点を囲む滑らかな閉曲線です。

その上に平衡点はなく、ベクトル場は等高線に接して動き続けます。閉曲線はコンパクトで速度も 0 にならないため有限時間で 1 周し、同じ運動を繰り返します。

正の初期値でも、平衡点からなら振動しない

初期値が (x_*, y_*) なら定数解です。それ以外の正の初期値からは周期軌道になります。初期値によって別の閉軌道を進むため、すべてが同じ周期・振幅に落ち着くわけではありません。

安定だが、漸近安定ではない

平衡近くの小さな等高線は近くにとどまるので、正の平衡点は安定です。しかし $H > 0$ の軌道が $H = 0$ の平衡へ近づくことはなく、漸近安定ではありません。周囲の軌道が 1 本の閉軌道へ吸い寄せられる「安定なリミットサイクル」とも異なります。

5 本文の練習問題：解答と解説

問 1：ヌルクラインと正の平衡点

式を因数分解すると、

$$x' = x(2 - 0.5y), \quad y' = y(0.25x - 1).$$

よって、 x -ヌルクラインは $x = 0$ または $y = 4$ 、 y -ヌルクラインは $y = 0$ または $x = 4$ です。

正の領域では座標軸を除くので、それぞれ $y = 4$ 、 $x = 4$ となり、正の平衡点は $(4, 4)$ です。なお、非負の領域全体では原点 $(0, 0)$ も平衡点です。

問 2：各領域での増減

領域	被食者 x	捕食者 y	例での (x', y')
$x < 4, y < 4$	増加	減少	$(2, 2)$ で $(2, -1)$
$x > 4, y < 4$	増加	増加	$(6, 2)$ で $(6, 1)$
$x > 4, y > 4$	減少	増加	$(6, 6)$ で $(-6, 3)$
$x < 4, y > 4$	減少	減少	$(2, 6)$ で $(-2, -3)$

正の領域では x, y 自体は正なので、 $2 - 0.5y$ と $0.25x - 1$ の符号を調べれば十分です。

境界線上の具体例

$(6, 4)$ では $x' = 0, y' = 2$ なので真上へ、 $(4, 6)$ では $x' = -4, y' = 0$ なので左へ動きます。 $(4, 4)$ では両方 0 です。

捕食者が多いことと、捕食者が増えることは別

捕食者 y が増えるかどうかを決めるのは、 y が 4 より大きいかではなく、被食者 x が 4 より大きいかです。例えば $(2, 6)$ では捕食者は多いものの、餌が少ないため減少します。

計算の手順

まず x, y をくくり、各括弧が 0 になるしきい値を求めます。次に正の領域を分け、符号を確認します。矢印の向きを描いた後、時系列での増減と対応させます。

6 追加問題と解答

本文と同じモデル $x' = x(2 - 0.5y)$, $y' = y(0.25x - 1)$ を用います。

問 1 $(x, y) = (8, 2)$ での変化率を求めよ。

問 2 $(x, y) = (2, 4)$ で、軌道はどちらへ進むか。この点で x は最大か最小か。

問 3 初期値 $(4, 4)$ から出発するとき、解を求めよ。

問 4 捕食者がいない初期値 $(3, 0)$ からの解を求めよ。

問 5 被食者の増殖係数 α だけを 2 から 3 へ変えると、正の平衡点はどう変わるか。

問 6 正の周期解の 1 周期平均を $\bar{x}, \bar{y}$ とする。 $\bar{x} = 4, \bar{y} = 4$ を示せ。【発展】

解答・解説

1. $x' = 8(2 - 1) = 8$, $y' = 2(2 - 1) = 2$ 。右上に進む。
2. $x' = 0, y' = 4(0.5 - 1) = -2$ より下へ進む。 y が 4 を上から下へ横切り、 x' が負から正へ変わる。 x は最小。
3. $x(t) = 4, y(t) = 4$ 。平衡点から出発すると周期的な増減は起こらない。
4. $y(t) \equiv 0$ であり、 $x' = 2x$ より $x(t) = 3e^{2t}$ 。正の内部の閉軌道とは異なる境界上の解。
5. $x_* = \gamma/\delta = 4$ は変わらず、 $y_* = \alpha/\beta = 6$ となる。 $(4, 6)$ が新しい平衡点。過渡的な変化と、平衡点の比較は区別する。
6. 周期を T として、 $d(\ln x)/dt = 2 - 0.5y$ を 1 周期積分すると、左辺は $\ln x(T) - \ln x(0) = 0$ 。よって $0 = 2T - 0.5 \int_0^T y dt$ から $\bar{y} = 4$ 。同様に $d(\ln y)/dt = 0.25x - 1$ より $\bar{x} = 4$ 。最大値と最小値の単純な平均ではなく、時間平均である。

講義で押さえること

相手の個体数が相対成長率を決める。ヌルクラインは片方の傾きが 0 になる場所。相平面と時系列を対応させる。理想モデルの周期性を、現実の生態系にそのまま当てはめない。