

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

ベクトル空間の構造

基底・座標・次元をつなげて理解する

1 「ベクトル」は、和とスカラー倍をもつ対象

ベクトル空間では、矢印や数の列に限らず、多項式や関数も「ベクトル」として扱えます。大切なのは、何を元とし、和と実数倍をどう定めるかです。

公理を省略せずに整理する

集合 V は空でなく、 $u+v$ と cu が常に V に属するとします。そのうえで、すべての $u, v, w \in V$ と実数 a, b に対し、次を要求します。

和について	スカラー倍について
$(u+v)+w=u+(v+w)$	$a(bu)=(ab)u$
$u+v=v+u$	$1u=u$
$u+0=u$ となる零ベクトルが存在	$a(u+v)=au+av$
$u+(-u)=0$ となる逆ベクトルが存在	$(a+b)u=au+bu$

「和とスカラー倍について閉じている」だけで、任意の演算がベクトル空間の演算になるわけではありません。上の計算法則も必要です。 $\mathbb{R}^n$ の通常の演算では、各成分の実数の計算法則から確認できます。

例：次数が2以下の多項式

$$P_2 = \{a + bt + ct^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

多項式を足しても実数倍しても、この形が保たれます。零ベクトルは零多項式であり、基底は $1, t, t^2$ 、次元は3です。零多項式も含める点に注意します。

同じ対象でも、指定された演算とスカラーの範囲を確認します。このノートでは、スカラーを実数、演算を通常の和と実数倍に固定します。

2 基底の2条件は「足りる」と「重複しない」

条件	意味	R^2 での例
生成	すべてのベクトルを表せる	$(1,0), (0,1), (1,1)$ は生成する
線形独立	零になる結合は係数が全部0	$(1,0)$ だけでも線形独立
基底	生成し、かつ線形独立	$(1,0), (0,1)$ は基底

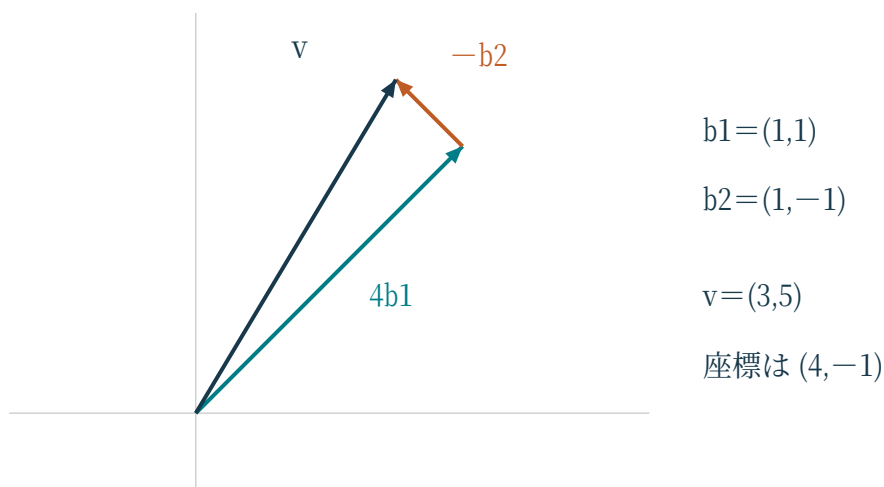
最初の例には $(1,1) = (1,0) + (0,1)$ という重複があるため、基底ではありません。2番目の例は y 方向のベクトルを表せないため、 R^2 の基底ではありません。

基底なら係数は一意に決まる

同じ v を2通りに表せたと仮定し、両式を引きます。

$$\sum_i a_i b_i = \sum_i c_i b_i \implies \sum_i (a_i - c_i) b_i = 0$$

線形独立性から $a_i - c_i = 0$ です。生成が「表せること」を、線形独立が「表し方の一意性」を保証します。座標を書く際は、基底の順序も指定します。



図では $v = 4b_1 - b_2$ です。同じベクトル v の標準座標は $(3,5)$ 、順序付き基底 (b_1, b_2) に関する座標は $(4, -1)$ です。ベクトルと、その座標表示を区別します。

3 部分空間は「計算しても外へ出ない集合」

既にベクトル空間である V の部分集合 W では、演算を V から引き継ぎます。計算法則も引き継がれるため、零ベクトルと2つの閉性を確認すれば十分です。

$$0 \in W, \quad u, v \in W \Rightarrow u + v \in W, \quad cu \in W$$

最後の条件は、すべての実数 c とすべての $u \in W$ に対して要求します。特に $c=0$ と $c=-1$ を忘れないようにします。

例：原点を通る直線と、平行移動した直線



$x+y=0$ なら、条件を満たす2つのベクトルの和でも成分の合計は0です。実数倍しても合計は0です。したがって部分空間になります。

$x+y=1$ は零ベクトルを含みません。例えば $(1,0)$ は属しますが、 $2(1,0)=(2,0)$ は属しません。1つの反例で、部分空間でないことが分かります。

原点を含むだけでは不十分です。x軸とy軸の和集合は原点を含みますが、 $(1,0)+(0,1)=(1,1)$ はその和集合に属しません。曲線 $y=x^2$ も原点を通りますが、通常の演算では部分空間ではありません。

なぜ非同次方程式の解集合は平行移動になるか

$Ax=b$ の解 x_0 が1つ存在すれば、すべての解は x_0+w ($Aw=0$) と書けます。 $b \neq 0$ のときは、部分空間そのものではなく、部分空間を平行移動したアフィン空間です。

4 次元は「独立に選べる係数の数」

平面を2個のパラメータで表す

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

$x=s$ 、 $y=t$ と自由を選ぶと、 $z=-s-t$ と決まります。したがって、

$$(x, y, z) = s(1, 0, -1) + t(0, 1, -1)$$

この2本は W を生成し、線形独立です。ゆえに $\dim W=2$ です。ベクトルの成分は3個ですが、独立に選べる量は2個です。

生成するベクトルの本数と次元は同じとは限らない

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (1, 1, 0)$$

$v_3=v_1+v_2$ なので、この3本が張る空間は xy 平面です。基底には v_1, v_2 を選べ、次元は2です。冗長なベクトルを除いても張る空間は変わりません。

与えられたベクトル	張る空間	次元
すべて零ベクトル	$\{0\}$	0
非零ベクトル1本とその倍数	原点を通る直線	1
線形独立な2本	原点を通る平面	2
$\mathbb{R}^3$ の線形独立な3本	$\mathbb{R}^3$ 全体	3

「一方が他方の倍数なら1次元」は、少なくとも一方が非零の場合です。両方が零なら次元は0です。零空間 $\{0\}$ の基底は空集合であり、零ベクトル1本を基底とはしません。

行列の階数とのつながり

ベクトルを列に並べた行列の階数は、それらが張る空間の次元です。例えば上の v_1, v_2, v_3 を列に並べた行列の階数は2です。連立方程式の自由変数を数える方法とも結びつきます。

データ点が原点を通らない平面上に並ぶ場合は、まず平均などの基準点を引いて中心化します。位置のずれと、変動する方向の数を区別することが次元削減の理解に役立ちます。

5 本文・問1：基底と座標変換を計算する

$v_1=(1,1,0)$ 、 $v_2=(1,0,1)$ 、 $v_3=(0,1,1)$ を、この順序で列に並べます。ベクトルはすべて列ベクトルとして扱います。

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 基底であるか

$$\det P = 1(0 - 1) - 1(1 - 0) = -2 \neq 0$$

P が正則なので列ベクトルは線形独立であり、 R^3 全体を生成します。よって、この3本は R^3 の基底です。

(2) $u=(2,3,4)$ の座標

$u=av_1+bv_2+cv_3$ とおくと、成分を比較して、

$$a + b = 2, \quad a + c = 3, \quad b + c = 4$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{2}, \quad c = \frac{5}{2}$$

したがって、求める座標は $(1/2, 3/2, 5/2)^T$ です。検算すると、各成分は $1/2+3/2=2$ 、 $1/2+5/2=3$ 、 $3/2+5/2=4$ になります。

(3) 標準座標から基底座標へ

一般の標準座標 (x,y,z) に対して、 $a=(x+y-z)/2$ 、 $b=(x-y+z)/2$ 、 $c=(-x+y+z)/2$ です。したがって変換行列は、

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

P は「基底座標 $\rightarrow$ 標準座標」、 P^{-1} は「標準座標 $\rightarrow$ 基底座標」の変換です。 P の列を入れ替えたなら、基底座標の並び順も同じように入れ替えます。

6 本文・問2：部分空間と線形結合を確かめる

(1) $W1: x+y+z=0$ は部分空間

零ベクトルについて $0+0+0=0$ なので、零ベクトルは $W1$ に属します。次に $u=(u_1, u_2, u_3)$ 、 $v=(v_1, v_2, v_3)$ を $W1$ の任意の元とします。

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) = 0 + 0 = 0$$

したがって $u+v$ も $W1$ に属します。また、任意の実数 c について cu の成分の合計は $c(u_1+u_2+u_3)=c \times 0=0$ です。3条件がすべて成り立つので、 $W1$ は部分空間です。

(2) $W2: x+y+z=1$ は部分空間でない

零ベクトルの成分の合計は0であり1ではありません。零ベクトルを含むという必要条件に反するため、この時点で部分空間ではないと判定できます。

(3)(4) 成分ごとに線形結合を計算する

$a_1=(1, -1, 0)$ 、 $a_2=(1, 0, -1)$ に対して、

$$2a_1 + 3a_2 = (2, -2, 0) + (3, 0, -3) = (5, -2, -3)$$

$$a_1 - a_2 = (1 - 1, -1 - 0, 0 - (-1)) = (0, -1, 1)$$

$$0a_1 + 4a_2 = (0, 0, 0) + (4, 0, -4) = (4, 0, -4)$$

成分の合計は、それぞれ $5-2-3=0$ 、 $0-1+1=0$ 、 $4+0-4=0$ です。したがって3つとも $W1$ に属します。これは、部分空間が線形結合について閉じていることの具体例です。

さらに：この2本は $W1$ の基底でもある

任意の $(x, y, z) \in W1$ に対し $x = -y - z$ なので、 $-ya_1 - za_2 = (-y - z, y, z) = (x, y, z)$ です。よって生成条件を満たします。

$$ca_1 + da_2 = (c + d, -c, -d) = 0 \implies c = d = 0$$

生成と線形独立の両方を確認できたので、 $\{a_1, a_2\}$ は $W1$ の基底です。基底ベクトルが2本なので $\dim W1=2$ です。

7 追加問題A：部分空間の判定を丁寧に行う

問題

$\mathbb{R}^2$ の次の集合について、零ベクトル・和・実数倍の3条件を調べ、部分空間か判定せよ。否定する場合は具体的な反例を挙げよ。

A1：第1象限を含む集合 $Q = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ 。

A2：x軸とy軸の和集合 $L = \{(x, y) \mid xy = 0\}$ 。

A3：直線 $M = \{(x, y) \mid y = 2x\}$ 。

A1の解答：和について閉じるだけでは足りない

零ベクトル： $(0, 0)$ は両成分が非負なので Q に属します。

和： u, v の各成分が非負なら、 $u+v$ の各成分も非負です。よって和について閉じています。

実数倍： $(1, 0) \in Q$ ですが、 -1 倍した $(-1, 0)$ は Q に属しません。したがって部分空間ではありません。

「正の数倍なら条件を保つ」と「すべての実数倍について閉じる」ことは異なります。負の数倍も必ず調べます。

A2の解答：2つの部分空間の和集合に注意する

零ベクトルは L に属します。実数倍しても、もともと0だった成分は0のままなので実数倍について閉じています。しかし $(1, 0), (0, 1) \in L$ である一方、

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin L$$

なので和について閉じていません。よって部分空間ではありません。なお、x軸とy軸が張る部分空間は、和集合ではなく $\mathbb{R}^2$ 全体です。

A3の解答：任意の元をパラメータで表す

$$M = \{t(1, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$t=0$ で零ベクトルを含みます。 $s(1, 2) + t(1, 2) = (s+t)(1, 2)$ 、 $c[t(1, 2)] = (ct)(1, 2)$ なので和と実数倍について閉じています。よって M は部分空間です。

部分空間であることを示すには任意の元で確認します。部分空間でないことを示すには、条件を破る反例を1つ見つければ十分です。

8 追加問題B・C：生成と独立を別々に確認する

問題B：冗長なベクトルを除く

$v_1=(1,2,3)$ 、 $v_2=(2,4,6)$ 、 $v_3=(0,1,0)$ とする。

(1) $W=\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ の基底と次元を求めよ。

(2) $u=(2,5,6)$ が W に属するかを調べ、属するなら基底座標を求めよ。

(3) $w=(1,0,0)$ が W に属するかを判定せよ。

B(1)：生成することと独立であること

$v_2=2v_1$ なので、 v_2 を除いても張る空間は変わりません。つまり $W=\text{span}\{v_1, v_3\}$ です。次に $av_1 + bv_3=0$ とおきます。

$$av_1 + bv_3 = (a, 2a + b, 3a) = 0$$

第1成分から $a=0$ 、第2成分から $b=0$ です。よって v_1, v_3 は線形独立です。生成と独立が確認できたので、 $\{v_1, v_3\}$ が基底であり $\dim W=2$ です。

B(2)(3)：所属の判定は連立方程式で行う

$$av_1 + bv_3 = (a, 2a + b, 3a)$$

$u=(2,5,6)$ では $a=2$ 、 $2a+b=5$ より $b=1$ 。第3成分も $3a=6$ と一致するので、 $u=2v_1+v_3$ です。順序付き基底 (v_1, v_3) に関する座標は $(2,1)$ です。

$w=(1,0,0)$ では、第1成分から $a=1$ ですが、第3成分から $3a=0$ が必要です。両立しないため w は W に属しません。

一般に $(x, y, z) \in W$ の必要十分条件は $z=3x$ です。この条件を満たせば $a=x$ 、 $b=y-2x$ と選べます。したがって W は平面 $z=3x$ です。

問題C： $\mathbb{R}^3$ の2本のベクトルは基底になれるか

解答：なれません。2本のベクトルが張る部分空間の次元は高々2であり、 $\mathbb{R}^3$ の次元3に届かないからです。独立な2本なら平面、依存する非零ベクトルなら直線、両方が零なら零空間を張ります。

$\mathbb{R}^3$ のベクトルを3本並べても、自動的に基底にはなりません。例えば $(1,0,0), (0,1,0), (1,1,0)$ は3本ありますが、張る空間は xy 平面です。

9 追加問題D・E：同じ対象の座標を取り替える

問題D：多項式もベクトルとして扱う

次数2以下の多項式の空間 P_2 で、基底 $B=(1, t, t^2)$ を考える。

- (1) $f(t)=2-3t+t^2$ の基底 B に関する座標を求めよ。
- (2) $C=(1, t+1, (t+1)^2)$ が基底であることを確認せよ。
- (3) 同じ $f(t)$ の基底 C に関する座標を求めよ。

Dの解答：多項式の恒等式として係数を比較する

(1) $f=2\times 1-3\times t+1\times t^2$ なので、座標は $(2, -3, 1)$ です。これは特定の t を代入した関数値ではなく、基底に掛ける係数の列です。

$$a + b(t+1) + c(t+1)^2 = (a+b+c) + (b+2c)t + ct^2$$

(2) 任意の $\alpha + \beta t + \gamma t^2$ を表すには $c=\gamma$ 、 $b=\beta-2\gamma$ 、 $a=\alpha-\beta+\gamma$ と選べます。したがって生成します。また零多項式に等しいなら、 $t^2, t, 1$ の順に係数を比較して $c=b=a=0$ となるので、線形独立です。

(3) $\alpha=2$ 、 $\beta=-3$ 、 $\gamma=1$ を代入すると、 $a=6$ 、 $b=-5$ 、 $c=1$ です。よって基底 C に関する座標は $(6, -5, 1)$ です。

$$6 - 5(t+1) + (t+1)^2 = 2 - 3t + t^2$$

問題E：非標準基底での座標変換

$\mathbb{R}^2$ の基底 $B=((1,1), (1,-1))$ について、 $u=(2,6)$ の基底座標を求めよ。また、標準座標から基底座標への変換式を求めよ。

Eの解答：列に並べた行列の向きを確認する

$$u = a(1, 1) + b(1, -1) = (a+b, a-b)$$

$a+b=2$ 、 $a-b=6$ を足すと $2a=8$ より $a=4$ 。差を取ると $2b=-4$ より $b=-2$ です。求める座標は $(4, -2)$ です。

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right)$$

基底ベクトルを列に並べた P は基底座標を標準座標へ戻す行列です。今回 $P=[[1,1],[1,-1]]$ 、 P の逆行列は $(1/2)P$ です。検算： $4(1,1)-2(1,-1)=(2,6)$ 。

10 追加問題F：条件の違いで次元が変わる

問題：パラメータを含む条件

実数 a に対し $W(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0, x+y+az=0\}$ とする。

(1) $W(a)$ が部分空間であることを示せ。

(2) $a=1$ のとき、基底と次元を求めよ。

(3) $a \neq 1$ のとき、基底と次元を求めよ。

F(1)：同次の条件は線形結合で保たれる

零ベクトルは両方の等式を満たします。 u, v が両方の等式を満たすなら、 $u+v$ も各左辺が $0+0=0$ になります。また cu も各左辺が $c \times 0 = 0$ です。したがって、すべての a について $W(a)$ は部分空間です。

F(2)： $a=1$ では2つの条件が重複する

2つの等式は同じ $x+y+z=0$ になります。独立な条件は1つだけです。 $x=s, y=t$ と置けば $z = -s-t$ と表せるので、

$$(x, y, z) = s(1, 0, -1) + t(0, 1, -1)$$

この2本は生成し、第1・第2成分を比較すれば線形独立です。よって基底に $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ を選べ、 $\dim W(1) = 2$ です。

F(3)： $a \neq 1$ では新しい制約が加わる

第2の等式から第1の等式を引くと、

$$(a-1)z = 0$$

$a \neq 1$ なので $z=0$ です。第1の等式は $x+y=0$ となるので、 $x=s, y=-s$ と置いて、

$$W(a) = \{s(1, -1, 0) \mid s \in \mathbb{R}\} \quad (a \neq 1)$$

$(1, -1, 0)$ は非零ベクトルであり、この1本が $W(a)$ を生成します。したがって基底は $\{(1, -1, 0)\}$ 、次元は1です。

式の本数をそのまま制約の数として数えないことが重要です。 $a=1$ では条件が重複して平面になり、 $a \neq 1$ では2つの独立な条件から直線になります。

学習の確認：部分空間か $\rightarrow$ すべての元をパラメータで表す $\rightarrow$ 生成するベクトルを取り出す $\rightarrow$ 線形独立性を確かめる $\rightarrow$ 基底の本数を数える、という順序で整理します。