

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

線形写像の構造

像・核・情報の分解をつなげて理解する

1 像は出力側、核は入力側にある

線形写像 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ では、「何が出力として現れるか」と「入力のどの違いが消えるか」を分けて考えます。前者が像、後者が核です。

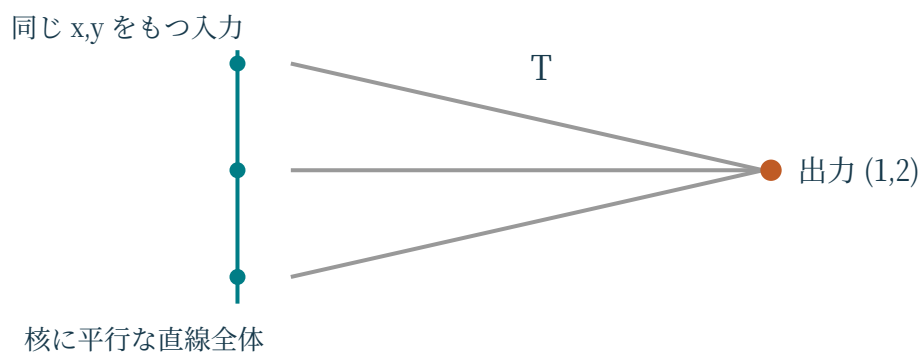
対象	属する空間	調べること
像 $\text{Im } T$	出力側 $\mathbb{R}^m$ の部分空間	実際に到達できる出力全体
核 $\text{Ker } T$	入力側 $\mathbb{R}^n$ の部分空間	出力が0になる入力全体
階数・退化次数	それぞれの部分空間の次元	独立な方向を何本もつか

例：高さを忘れる射影

$$T(x, y, z) = (x, y), \quad \text{Im } T = \mathbb{R}^2$$

$$\text{Ker } T = \{(0, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$(1, 2, 0)$ 、 $(1, 2, 3)$ 、 $(1, 2, -5)$ は、すべて $(1, 2)$ に写ります。出力から x, y は分かりますが、高さ z は復元できません。



核は「零に写る入力」だけを集めます。一方、一般の出力 b に写る入力の集合は、核を平行移動した集合になります。

2 行基本変形で、何が保たれるか

本文の例を最後まで行簡約する

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

第2行から第1行を引き、第3行にその第2行を足します。続いて第2行の符号を変え、第1行から第2行の2倍を引くと、次の簡約形になります。

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主成分（ピボット）は第1列と第2列にあり、階数は2です。元の列を a_1, a_2, a_3 とすると $a_3 = -a_1 + 2a_2$ なので、像の基底には元の第1列と第2列を選べます。

$$\text{Im } A = \text{span} \{(1, 1, 0), (2, 1, 1)\}$$

出力 (u, v, w) は $u - v - w = 0$ を満たします。この平面は2次元なので、上の像はこの平面全体に一致します。

$$\text{Ker } A = \{t(1, -2, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

像の基底は「元の行列の列」から取る

行基本変形は、ある正則行列 E により $R = EA$ と書けます。したがって $Rx = 0$ と $Ax = 0$ は同値ですが、出力ベクトル自体は E によって変わります。

階数と核は保たれますが、像そのものは一般に変わります。この例で $\text{Im } R$ は第3成分が0の平面です。 $\text{Im } A$ とは異なります。 R のピボット列の「番号」を読み取り、 A の対応する列を選びます。

3 次元定理は、入力自由度を数える定理

$$n = \text{rank } A + \text{nullity } A$$

$m \times n$ 行列の n は入力の成分数です。階段形にピボットが r 個あれば、自由変数は $n-r$ 個あります。同次方程式の解は自由変数で表せるので、核の次元は $n-r$ です。

基底を使った証明の見取り図【発展】

核の基底 $k_1, \dots, k_d$ を、入力空間全体の基底 $k_1, \dots, k_d, u_1, \dots, u_r$ に延長します。このとき $n=d+r$ です。

生成：どの入力もこの基底の線形結合です。T を作用させると $Tk_1 = \dots = Tk_d = 0$ なので、出力は $Tu_1, \dots, Tu_r$ の線形結合になります。

独立： $c_1Tu_1 + \dots + c_rTu_r = 0$ なら、 $c_1u_1 + \dots + c_ru_r$ は核に属します。核の基底による表現と比較すると、入力空間の基底の独立性から $c_1 = \dots = c_r = 0$ です。

したがって $Tu_1, \dots, Tu_r$ は像の基底で、 $\text{rank } T = r$ 。核の基底の本数 d と合わせて、 $n=d+r$ が得られます。

単射・全射は、階数で判定できる

性質	階数による条件	次元から必要な条件
単射	$\text{rank } A = n$	$n \leq m$
全射	$\text{rank } A = m$	$m \leq n$
全単射	$\text{rank } A = n = m$	正方行列で正則

次元の大小だけで単射・全射が決まるわけではありません。例えば $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は単射になれるが、零写像なら単射ではありません。

$$Tx = Ty \iff T(x - y) = 0$$

この同値式から、核が $\{0\}$ なら $x=y$ となり、単射だと分かります。核が非自明なら、同じ出力になる異なる入力が存在します。

4 直交分解：消える成分を取り出す

核の直交補空間も入力側にあります。像は出力側にあるため、像と核の直交補空間を同じ集合だと思わないことが重要です。

$$\mathbb{R}^n = (\text{Ker}A)^\perp \oplus \text{Ker}A$$

A は核の直交補空間を像へ一対一に写します。ただし、一般の A は長さや角度を保つとは限りません。「情報を区別できること」と「形をそのまま保つこと」は別です。

本文・問2：核と直交分解

A の2行は $(1,0,1)$ 、 $(0,1,1)$ です。 $Ax=0$ は $x_1+x_3=0$ 、 $x_2+x_3=0$ なので、核の基底に $k=(-1,-1,1)$ を選べます。

$$\begin{aligned} x &= (0, -1, 2) = (1, 0, 1) + (-1, -1, 1) = x_\perp + x_{\text{ker}} \\ (1, 0, 1) \cdot (-1, -1, 1) &= -1 + 0 + 1 = 0 \end{aligned}$$

第1項は核の基底 k と直交するので、核のすべてのベクトルと直交します。第2項は k そのものなので核に属します。

$$Ax = (2, 1), \quad Ax_\perp = (2, 1), \quad Ax_{\text{ker}} = (0, 0)$$

核が1次元なら射影公式でも求められる

$$x_{\text{ker}} = \frac{x \cdot k}{k \cdot k} k = \frac{3}{3} k = k$$

あとは $x_\perp = x - x_{\text{ker}}$ とすれば $(1,0,1)$ が得られます。ここで $x \cdot k = 3$ 、 $k \cdot k = 3$ です。

出力 $(2,1)$ に写る入力 $(1,0,1)+t(-1,-1,1)$ の全体です。その中で核と直交する入力は $(1,0,1)$ ただ1つです。直交性から、その入力の長さが最小になります。

$$\|x_\perp + tk\|^2 = \|x_\perp\|^2 + t^2\|k\|^2 = 2 + 3t^2$$

5 本文・問1と問3：基底と自由変数を読む

問1： $T(x,y,z) = (x+2y-z, 2x+4y-2z)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

各列は $(1,2)$ の倍数なので、像は直線です。第1列は零ベクトルではないため、像の基底は $\{(1,2)\}$ 、像の次元は1です。

$$\text{Im } T = \{s(1, 2) \mid s \in \mathbb{R}\}$$

核の条件は $x+2y-z=0$ です。 $y=s, z=t$ とおけば $x=-2s+t$ なので、

$$\text{Ker } T = \{s(-2, 1, 0) + t(1, 0, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

この2本は第2・第3成分を比較すると線形独立です。よって核の基底は $\{(-2,1,0), (1,0,1)\}$ であり、核の次元は2です。

$$\dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T = 2 + 1 = 3$$

出力先は $\mathbb{R}^2$ ですが、実際に到達するのはその中の直線だけです。この写像は全射ではありません。また核の次元が2なので単射でもありません。

問3：階段形の非零行を数える

行列	階数	核の次元
A：非零行が2本	2	$3-2=1$
B：非零行が3本	3	$3-3=0$

どちらも既に行階段形なので、非零行の本数が階数です。A では核の基底に $(6, -3, 1)$ を選べ、B は正則なので核は $\{0\}$ です。

「非零行の本数＝階数」は、行階段形で用いる読み方です。一般の行列で非零行を数えるだけでは不十分です。例えば第1行 $(1,2)$ 、第2行 $(2,4)$ の行列は、非零行が2本あっても階数は1です。

6 追加問題A：同じ出力をもつ入力全体を求める

問題：高さを忘れる射影

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $T(x,y,z)=(x,y)$ とする。

- (1) 像と核の基底・次元を求め、単射・全射を判定せよ。
- (2) 出力 $(3, -2)$ をもつ入力全体を求めよ。
- (3) その中で長さが最小の入力を求めよ。

A(1)：像は出力全体、核は高さ方向

任意の $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ は $T(a,b,0)=(a,b)$ と表せるので、像は $\mathbb{R}^2$ 全体です。像の基底には $(1,0), (0,1)$ を選べ、階数は2です。

$T(x,y,z)=(0,0)$ は $x=y=0$ と同値です。 z は任意なので、核は $\{(0,0,t) \mid t \text{ は実数}\}$ です。基底は $(0,0,1)$ 、核の次元は1です。次元定理は $3=2+1$ となります。

像が出力空間全体なので全射です。一方、 $T(0,0,0)=T(0,0,1)$ で異なる入力と同じ出力になるため、単射ではありません。

A(2)：1つの解に核の元を加える

$$T(x, y, z) = (3, -2) \iff x = 3, y = -2$$

$$T^{-1}(3, -2) = \{(3, -2, 0) + t(0, 0, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

ここで $T^{-1}(3, -2)$ は逆像、すなわちこの出力をもつ入力の集合を表します。 T は単射でないので、逆関数が存在するという意味ではありません。

A(3)：長さを最小にする

$$\|(3, -2, t)\|^2 = 3^2 + (-2)^2 + t^2 = 13 + t^2$$

$t^2 \geq 0$ であり、等号は $t=0$ のときだけです。したがって、最小の入力は $(3, -2, 0)$ 、最小の長さは $\sqrt{13}$ です。

一般に $Ax=b$ に解 x_0 があれば、解全体は $x_0 + \text{Ker } A$ です。実際、 $Ax=b$ と $Ax_0=b$ の差から $A(x-x_0)=0$ 。逆に $w \in \text{Ker } A$ なら $A(x_0+w)=b$ です。

7 追加問題B：核・像・直交補空間を区別する

問題

$S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $S(x,y)=(x+y,0)$ とする。

(1) 像と核の基底を求め、直交するか調べよ。

(2) 核の直交補空間の基底を求めよ。

(3) $u=(3,1)$ を核成分とその直交補成分に分解し、出力を検算せよ。

B(1)：像と核は一般には直交しない

$$\text{Im } S = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \text{Ker } S = \{t(1, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

像の基底は $(1,0)$ 、核の基底は $k=(1,-1)$ です。内積 $(1,0) \cdot (1,-1)=1 \neq 0$ なので、この2つの直線は直交しません。像も核も1次元で、 $2=1+1$ が成り立ちます。

B(2)：直交補空間は入力側にある

(a,b) が核のすべての元と直交する条件は $(a,b) \cdot k = a-b=0$ です。よって $a=b$ であり、核の直交補空間は $\{(t,t) \mid t \text{ は実数}\}$ 、基底は $(1,1)$ です。

B(3)：射影公式と検算

$$u_{\text{ker}} = \frac{u \cdot k}{k \cdot k} k = \frac{3-1}{1+1} (1, -1) = (1, -1)$$

$$u_{\perp} = u - u_{\text{ker}} = (3, 1) - (1, -1) = (2, 2)$$

和は $(2,2)+(1,-1)=(3,1)$ 、内積は $(2,2) \cdot (1,-1)=0$ です。また $S(1,-1)=(0,0)$ なので核成分であることも確認できます。

$$Su = (4, 0), \quad Su_{\perp} = (4, 0), \quad Su_{\text{ker}} = (0, 0)$$

核の直交補空間 $\text{span}\{(1,1)\}$ と像 $\text{span}\{(1,0)\}$ は異なる直線です。S は前者を後者へ一対一に写します。

長さも比較すると、入力 $(2,2)$ の長さは $2\sqrt{2}$ 、出力 $(4,0)$ の長さは4です。核と直交する成分が出力を決めても、一般の線形写像が長さを保つわけではありません。

8 追加問題C・D：階数と自由変数を数える

問題C：次元だけから判定する

線形写像 $R^4 \rightarrow R^2$ の階数が2である。核の次元を求め、単射・全射を判定せよ。また階数が1の場合も答えよ。

Cの解答

階数2：入力次元は4なので、核の次元は $4-2=2$ です。核が零ベクトルだけではないため単射ではありません。像の次元が出力空間の次元2と等しいため全射です。

階数1：核の次元は $4-1=3$ です。単射ではありません。また像は R^2 内の1次元部分空間なので全射でもありません。 $R^4 \rightarrow R^2$ は階数が高々2のため、どの場合も単射にはなれません。

問題D：4変数の具体的な写像

$T: R^4 \rightarrow R^2$ を $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + x_4, x_3 - x_4)$ とする。像・核の基底と次元を求めよ。また $b = (3, -1)$ をもつ入力全体を求めよ。

Dの解答：まず列ベクトルを確認する

行列の列は $(1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, -1)$ です。第1・第3列が R^2 の標準基底なので、像は R^2 全体、階数は2です。

核の条件は $x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, x_3 - x_4 = 0$ です。自由変数を $x_2 = s, x_4 = t$ とすると $x_1 = -2s - t, x_3 = t$ なので、

$$x = s(-2, 1, 0, 0) + t(-1, 0, 1, 1)$$

この2本は核全体を生成します。線形結合が零なら第2・第4成分から $s = t = 0$ となるので、線形独立です。よって核の基底であり、核の次元は2です。

$$4 = \dim \operatorname{Im} T + \dim \operatorname{Ker} T = 2 + 2$$

$b = (3, -1)$ の解には $x_0 = (3, 0, -1, 0)$ を選べます。したがって解全体は、

$$x = (3, 0, -1, 0) + s(-2, 1, 0, 0) + t(-1, 0, 1, 1)$$

代入すると第1出力は $3 - 2s - t + 2s + t = 3$ 、第2出力は $-1 + t - t = -1$ です。パラメータが変わっても出力が変わらないことまで検算します。

9 追加問題E：パラメータで階数が変わる

問題

実数 a に対し $T_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $T_a(x, y, z) = (x+y+z, x+y+az)$ とする。 $a=1$ と $a \neq 1$ に分けて、像・核の基底、階数、核の次元、単射・全射を求めよ。

$a=1$ ：2つの出力成分が常に等しい

$$T_1(x, y, z) = (s, s), \quad s = x + y + z$$

s は任意の実数を取るなので、像は $\text{span}\{(1, 1)\}$ です。階数は1。核の条件は $x+y+z=0$ であり、 $x=p$ 、 $y=q$ とおけば、

$$(x, y, z) = p(1, 0, -1) + q(0, 1, -1)$$

2本は生成し、第1・第2成分から独立性も確認できます。よって核の基底にこの2本を選べ、核の次元は2です。次元定理は $3=1+2$ 。核が非自明なので単射でなく、像が直線なので全射でもありません。

$a \neq 1$ ：任意の出力に到達できる

列ベクトル $(1, 1)$ と $(1, a)$ の行列式は $a-1 \neq 0$ なので、これらは $\mathbb{R}^2$ の基底です。したがって像は $\mathbb{R}^2$ 、階数は2です。核では2つの等式を引くと、

$$(a-1)z = 0 \implies z = 0, \quad x + y = 0$$

よって核は $\text{span}\{(1, -1, 0)\}$ 、核の次元は1です。次元定理は $3=2+1$ 。単射ではありませんが、全射です。

全射であることを実際の解でも確認する

任意の出力 (u, v) に対し、 $z=(v-u)/(a-1)$ 、 $y=0$ 、 $x=u-z$ と置けば、

$$x + y + z = u, \quad x + y + az = u + (a-1)z = v$$

例外値 $a=1$ では行が同じになり、独立な出力方向が1本減ります。パラメータを含む式で $a-1$ で割るときは、 $a=1$ を先に別扱いします。

10 追加問題F：行基本変形と像の基底

問題

行列 A の列を a_1, a_2, a_3 とする。

- (1) 下の A を行簡約し、階数と核の基底を求めよ。
- (2) 元の行列の列から像の基底を選び、簡約後の像と比較せよ。
- (3) 「行基本変形は像そのものを保つ」という主張を判定せよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

F(1)：第2行から第1行を引く

第2行は $(0,0,1)$ となります。第3行からこの第2行を引くと零行になり、簡約形は次になります。

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ピボットは第1・第3列なので階数は2です。 $Rx=0$ は $x_1+2x_2=0$ 、 $x_3=0$ 。 $x_2=t$ とおけば $x=t(-2,1,0)$ なので核の基底は $(-2,1,0)$ 、核の次元は1です。

F(2)：ピボットの列番号を元の行列へ戻す

$$\text{Im } A = \text{span} \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

第2列は第1列の2倍です。第1・第3列は独立なので、上の2本が像の基底です。出力 (u,v,w) は $v=u+w$ を満たす平面を作ります。

$$\text{Im } R = \text{span} \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

簡約後の像は第3成分が0の平面です。例えば $(0,1,1)$ は $\text{Im } A$ に属しますが $\text{Im } R$ には属しません。したがって両者は異なります。

F(3)の主張は誤りです。行基本変形で保たれるのは階数と核です。像の基底には、簡約形のピボット列と同じ番号の「元の行列の列」を選びます。