

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

固有値は「特別な方向の倍率」

幾何・連立方程式・対角化をつなぐ

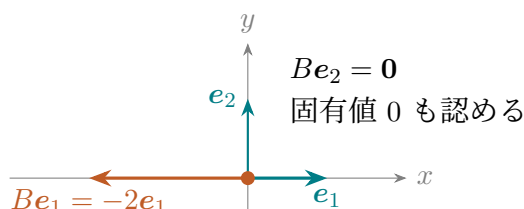
1 保たれるのは、矢印の向きよりも「直線」

$Av = \lambda v$ は、非零ベクトル v の張る直線が、変換後もその直線の中に写ることを表します。実固有値の場合、長さは $|\lambda|$ 倍です。 $\lambda < 0$ では矢印の向きが反転し、 $\lambda = 0$ では原点に潰れます。

固有値	固有ベクトルに対する作用
3	同じ向きに 3 倍
1/2	同じ向きに半分
-2	反対向きに 2 倍
-1	長さは同じ、向きは反対
0	零ベクトルへ写す

例：反転する方向と、潰れる方向

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



零ベクトルと零固有値は別

固有ベクトルとして $\mathbf{0}$ は認めませんが、固有値として 0 は認めます。 $Av = \mathbf{0}$ を満たす**非零**の v があれば、 0 は固有値です。これは A が可逆でないことと同値です。

2 なぜ行列式を 0 にするのか

固有ベクトルを求める条件は

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \iff (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

です。もし $A - \lambda I$ に逆行列があれば、両辺にその逆行列を掛けて $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ となってしまいます。よって非零解があるには、 $A - \lambda I$ が可逆でないことが必要です。

逆に、正方行列 $A - \lambda I$ が可逆でなければ、その列ベクトルは一次従属であり、同次方程式には非零解があります。したがって

$$\boxed{\lambda \text{ が固有値}} \iff \boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

が成り立ちます。ここで選ぶ数の範囲（実数か複素数か）もそろえます。

固有空間は、零ベクトルを含む

固有値 λ に対して

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I) = \{\mathbf{v} \mid (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

を固有空間といいます。固有ベクトルは E_λ から零ベクトルを除いたものです。同じ固有値の固有ベクトルを足すと、零ベクトルになる場合を除き、再び同じ固有値の固有ベクトルになります。

2 次正方行列で使える確認式

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ なら、

$$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

固有値を重複込みで λ_1, λ_2 とすると、解と係数の関係から

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det A.$$

この 2 式は、計算結果の確認に使えます。

固有ベクトルは「一つ」ではない

$\lambda = 3$ の固有空間が $\{t(1, 1)^\top \mid t \in \mathbb{R}\}$ なら、固有ベクトル全体は $t \neq 0$ の部分です。 $(1, 1)^\top$ はその代表の一つです。異なる非零倍は同じ直線を表しますが、ベクトルとしては異なります。

3 固有方向に分解すると、変換が見える

本文の $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について、長さ 1 の固有ベクトルを

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

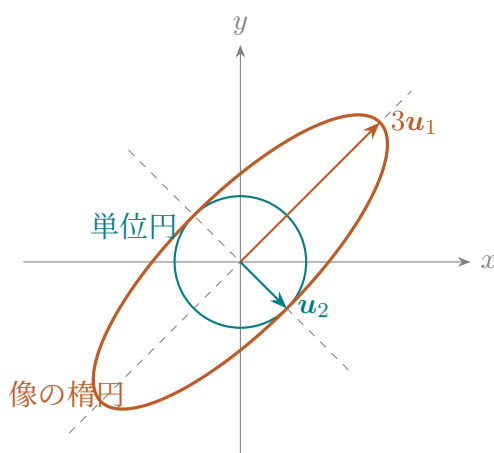
とします。互いに直交し、 $A\mathbf{u}_1 = 3\mathbf{u}_1$ 、 $A\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2$ です。

一般のベクトルを、2 方向の和にする

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

変換後は第 1 成分だけが 3 倍になります。例えば $(2, 0)^\top = (1, 1)^\top + (1, -1)^\top$ なので、

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



同じ縮尺で重ねた図。半軸の長さは 3 と 1。単位固有ベクトルを使うと、円上の点と楕円上の点の対応が明確になる。

一般の行列では注意

この例は実対称行列なので、直交する固有方向が楕円の主軸になります。一般の非対称行列では、固有方向が直交するとは限らず、単位円の像の主軸とも限りません。一般の伸縮の主方向は、特異値分解で扱います。

4 固有値の重複と、固有ベクトルの不足

同じ固有値をもつ 2 つの行列を比較する

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

どちらの固有方程式も $(2 - \lambda)^2 = 0$ で、固有値 2 は重解です。しかし固有空間は異なります。

	B	C
固有ベクトルの条件	$(B - 2I)v = 0$ は常に成立	$(C - 2I)(x, y)^T = (y, 0)^T = 0$
固有空間	$\mathbb{R}^2$	$\{(x, 0)^T \mid x \in \mathbb{R}\}$
独立な固有ベクトル	2 本取れる	1 本しか取れない
対角化	可能 (既に対角行列)	不可能

対角化に必要なのは、独立な方向の数

2 本の一次独立な固有ベクトルを列に並べて $P = (v_1, v_2)$ とすると、

$$AP = (Av_1, Av_2) = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

P は可逆なので、 $P^{-1}AP$ が対角行列になります。逆に対角化できれば、 P の各列が一次独立な固有ベクトルになります。

重解だから対角化できない、ではない

n 次正方行列が対角化できる条件は、その数の範囲で n 本の一次独立な固有ベクトルを取れることです。重解があっても、必要な本数があれば対角化できます。

回転は、実数と複素数で事情が変わる

$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ では

$$\det(R - \lambda I) = \lambda^2 + 1.$$

実数解はありませんが、複素数では $\lambda = \pm i$ です。例えば $R(1, -i)^T = i(1, -i)^T$ 。これは複素ベクトルの等式であり、実平面内に不変な直線があるという意味ではありません。

5 本文の練習問題：解答と確認

問 1：対角行列

$$D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

固有値は 4 と 2。それぞれの固有ベクトルは、 $(1, 0)^\top$ と $(0, 1)^\top$ の非零倍です。

問 2：パラメータと対角化

$$\det(A_a - \lambda I) = (a - \lambda)(2 - \lambda).$$

よって固有値は $a, 2$ です。 $a = 2$ では、固有空間は $y = 0$ を満たすベクトル全体で 1 次元しかありません。従って対角化できません。

なお $a \neq 2$ なら、 $\lambda = a$ には $(1, 0)^\top$ 、 $\lambda = 2$ には $(1, 2 - a)^\top$ を取れます。2 本は一次独立なので対角化できます。

問 3：非対角行列

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2).$$

固有値 5： $(A - 5I)(x, y)^\top = \mathbf{0}$ から $-x + y = 0$ 。方向は $(1, 1)^\top$ です。

固有値 2： $(A - 2I)(x, y)^\top = \mathbf{0}$ から $2x + y = 0$ 。方向は $(1, -2)^\top$ です。

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

それぞれ、同じ向きに 5 倍、2 倍されます。確認として、 $5 + 2 = 7 = \operatorname{tr} A$ 、 $5 \cdot 2 = 10 = \det A$ です。

固有方向は、いつも直交するわけではない

問 3 の 2 本の内積は $(1, 1) \cdot (1, -2) = -1$ で、0 ではありません。それでも 2 本は一次独立であり、対角化に使えます。実対称行列なら、異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交します。

計算後の最も確実な確認

求めた固有値とベクトルを、もとの式 $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ に代入します。固有方程式だけでなく、ベクトルが非零であることと、対応する固有値の取り違えも確認できます。

6 追加問題：定義を使いこなす

問 A：反転と縮小

$M = \text{diag}(-1, 1/2)$ について、固有値と固有方向を求めてください。また、 M^2 はそれぞれの方向にどう作用しますか。

問 B：固有値 0 の方向

$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有方向を求めてください。どの直線が原点へ潰れますか。

問 C：異なる固有値のベクトルを足すと？

本文の $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について、 $\mathbf{v}_1 = (1, 1)^\top$ と $\mathbf{v}_2 = (1, -1)^\top$ は固有ベクトルです。和 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ も固有ベクトルでしょうか。

問 D：繰り返し変換【発展】

同じ A について、 $A^m(2, 0)^\top$ を非負整数 m を用いて表してください。

解答・考え方

A 固有値 -1 の方向は $(1, 0)^\top$ 、固有値 $1/2$ の方向は $(0, 1)^\top$ 。 M^2 では倍率がそれぞれ 1 、 $1/4$ になります。

B 特性方程式は $(1 - \lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2) = 0$ 。固有値 2 の方向は $(1, 1)^\top$ 、固有値 0 の方向は $(1, -1)^\top$ 。直線 $x + y = 0$ が原点へ潰れます。

C 和は $(2, 0)^\top$ で、その像は $(4, 2)^\top$ です。定数倍にならないので、固有ベクトルではありません。

D $(2, 0)^\top = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ で、 $A^m \mathbf{v}_1 = 3^m \mathbf{v}_1$ 、 $A^m \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$ 。よって

$$A^m \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^m + 1 \\ 3^m - 1 \end{pmatrix}.$$

発展：実対称行列で固有方向が直交する理由

$A = A^\top$ 、 $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ 、 $A\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$ なら、

$$\lambda \mathbf{u}^\top \mathbf{v} = (A\mathbf{u})^\top \mathbf{v} = \mathbf{u}^\top A\mathbf{v} = \mu \mathbf{u}^\top \mathbf{v}.$$

$\lambda \neq \mu$ なら $\mathbf{u}^\top \mathbf{v} = 0$ です。この性質は、共分散行列の固有ベクトルを用いる主成分分析にもつながります。