

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

対角化は「座標の着替え」

固有ベクトル基底で計算を分ける

1 同じベクトルを、別の物差しで表す

本文の行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ では、固有ベクトル $\mathbf{v}_1 = (1, 1)^\top$ 、 $\mathbf{v}_2 = (1, -1)^\top$ を基底に使用します。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = P\mathbf{c}$ なので、 $\mathbf{c} = P^{-1}\mathbf{x}$ です。 $\mathbf{c}$ は別の点へ動いた結果ではなく、**同じベクトルの固有基底での座標**です。

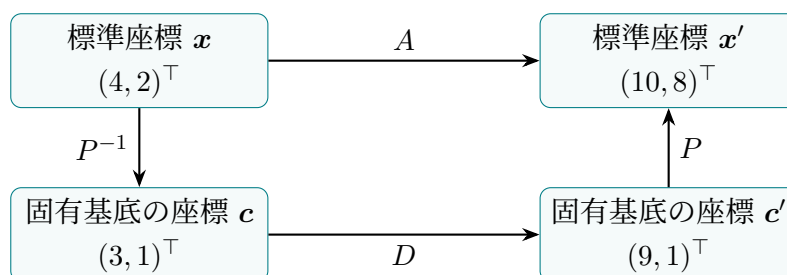
例： $(4, 2)^\top$ の座標を変える

$$\mathbf{c} = P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

この座標では $D = \text{diag}(3, 1)$ を作用させればよく、

$$\mathbf{c}' = D\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = P\mathbf{c}' = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

直接計算した $A(4, 2)^\top = (10, 8)^\top$ と一致します。



上の経路と下の経路が同じ結果を与えることが、 $A = PDP^{-1}$ の意味。行列積は右から作用する。

2 独立な固有ベクトルが、対角化を保証する

各列について $Av_i = \lambda_i v_i$ なら、

$$AP = (Av_1, \dots, Av_n) = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) = PD.$$

列が一次独立なら P は可逆なので、 $P^{-1}AP = D$ が得られます。逆にこの式が成立すれば、 P の各列は一次独立な固有ベクトルです。

異なる固有値の固有ベクトルはなぜ独立か

2 本の場合、 $av_1 + bv_2 = \mathbf{0}$ に A を作用させると、 $a\lambda_1 v_1 + b\lambda_2 v_2 = \mathbf{0}$ です。元の式の λ_2 倍を引けば

$$a(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 = \mathbf{0}.$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 、 $v_1 \neq \mathbf{0}$ より $a = 0$ 、続いて $b = 0$ です。

一般に、 $\sum_{i=1}^m a_i v_i = \mathbf{0}$ に $A - \lambda_m I$ を作用させると

$$\sum_{i=1}^{m-1} a_i (\lambda_i - \lambda_m) v_i = \mathbf{0}.$$

$m-1$ 本での独立性を仮定すれば $a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$ 、さらに $a_m = 0$ となります。これが帰納法による証明です。

実対称行列では、座標変換がさらに簡単になる

本文の例では、 P の列を長さ 1 にすると

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q^\top Q = I, \quad Q^{-1} = Q^\top.$$

$A = QDQ^\top$ となり、逆行列は転置だけで求まります。直交基底への座標変更は、長さや角度を保ちます。

列の順序・長さは自由だが、対応をそろえる

固有ベクトルを非零倍しても対角化できます。列の順序を入れ替える場合は、 D の固有値も同じ順序に並べ替えます。また一般の P では、 $P^{-1} = P^\top$ とは限りません。

3 重複度の判定には「数の範囲」も必要

実数で対角化するのか、複素数で対角化するのかを最初に決めます。重複度を使う判定は、次の形にすると正確です。

対角化の必要十分条件

選んだ数の範囲で特性多項式が 1 次式の積に分解でき、**各固有値の幾何的重複度が代数的重複度に等しい**とき、かつそのときに限り、その範囲で対角化できます。

複素数では特性多項式は必ず 1 次式の積になります。実数では、すべての固有値が実数であることも必要です。例えば 90 度回転の特性多項式 $\lambda^2 + 1$ は実数で分解できず、実数では対角化できません。

重解があっても、独立な方向が足りればよい

行列	固有値	代数的重複度	幾何的重複度
$2I_2$	2	2	2
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	2	2	1

前者は対角化できますが、後者はできません。後者では固有ベクトルがすべて x 軸方向になり、2 次元の基底を作れないからです。

せん断を繰り返すと、固有値だけでは見えない変化が出る

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I + N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = 0.$$

二項展開より、非負整数 m について

$$J^m = I + mN = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$J^m(0,1)^\top = (m,1)^\top$ なので、固有値がすべて 1 でもベクトルは際限なく大きくなりえます。

長期挙動の読み取りでの注意

「 $|\lambda| = 1$ の成分は大きさが変わらない」という説明は、固有ベクトルに分解できる場合の各成分についての説明です。対角化できない場合には、上の m のような因子も現れます。

4 累乗と漸化式を、独立な計算に分ける

$A = PDP^{-1}$ なら、中間の $P^{-1}P = I$ が消えるので

$$A^m = PD^mP^{-1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

です。 $m = 0$ では $A^0 = D^0 = I$ とします。負の整数まで扱うには、 A が可逆であることが必要です。

本文の行列の累乗を最後まで計算する

$$A^m = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^m + 1 & 3^m - 1 \\ 3^m - 1 & 3^m + 1 \end{pmatrix}.$$

$m = 1$ を入れると元の A 、 $m = 2$ では $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ となり、直接の行列積でも確認できます。

連立漸化式への応用

$$\begin{cases} u_{m+1} = 2u_m + v_m, \\ v_{m+1} = u_m + 2v_m \end{cases}, \quad (u_0, v_0) = (2, 0)$$

を考えます。和 $s_m = u_m + v_m$ と差 $d_m = u_m - v_m$ を使うと、

$$s_{m+1} = 3s_m, \quad d_{m+1} = d_m.$$

$s_0 = d_0 = 2$ より $s_m = 2 \cdot 3^m$ 、 $d_m = 2$ 。よって

$$u_m = \frac{s_m + d_m}{2} = 3^m + 1, \quad v_m = \frac{s_m - d_m}{2} = 3^m - 1.$$

和と差への変換は、固有方向の座標を使うことに対応しています。

倍率	反復したときの固有方向成分
$ \lambda < 1$	0 へ減衰する
$\lambda = 1$	そのまま残る
$\lambda = -1$	符号が交互に変わる
$ \lambda > 1$	初期成分が非零なら絶対値が増大する

この表は実固有値に対する説明。全体の長期挙動は、初期ベクトルがどの固有方向の成分を含むかにも依存する。

5 列確率行列：割合はどこへ落ち着くか

本文の $C = \begin{pmatrix} .8 & .3 \\ .2 & .7 \end{pmatrix}$ は、各列の和が 1 で、成分が非負です。 $\mathbf{x}_m = (u_m, v_m)^\top$ を 2 状態の割合とすると、 $u_m + v_m = 1$ が保たれます。

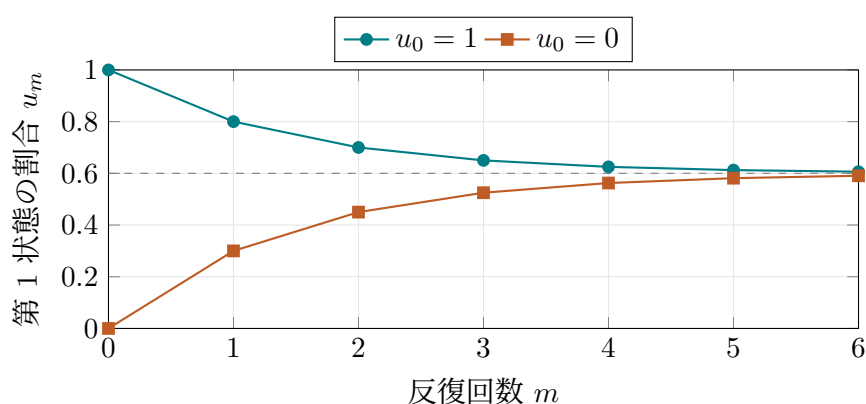
$$\det(C - \lambda I) = (.8 - \lambda)(.7 - \lambda) - .06 = \lambda^2 - 1.5\lambda + .5 = (\lambda - 1)(\lambda - .5).$$

固有値 1 には $\boldsymbol{\pi} = (.6, .4)^\top$ 、固有値 .5 には $\mathbf{w} = (1, -1)^\top$ が対応します。初期値 $(u_0, 1 - u_0)^\top$ は

$$\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\pi} + (u_0 - .6)\mathbf{w}$$

と分解できるので、

$$\boxed{\mathbf{x}_m = \boldsymbol{\pi} + (u_0 - .6)(.5)^m \mathbf{w}} \implies \mathbf{x}_m \longrightarrow \begin{pmatrix} .6 \\ .4 \end{pmatrix}.$$



初期値が違ってても 0.6 へ近づく。この例では、ずれが 1 回ごとに半分になる。

総量が 1 でない場合

初期総量が $M = u_0 + v_0$ なら、極限は $M(.6, .4)^\top$ です。確率ベクトルという条件なしに、常に $(.6, .4)^\top$ へ収束するわけではありません。また、すべての列確率行列がこの例のように収束するわけではありません。

6 本文の解答と追加問題

本文の練習問題の要点

問 1 $A(1,1)^\top = (3,3)^\top$ 、 $A(1,-1)^\top = (1,-1)^\top$ より $AP = PD$ 。 $\det P = -2 \neq 0$ なので対角化でき、累乗は 4 ページの公式です。

問 2 特性方程式は $(2-\lambda)^2 = 0$ 。固有値 2 の代数的重複度は 2、固有空間は $\{(x,0)^\top \mid x \in \mathbb{R}\}$ で幾何的重複度は 1。したがって対角化できません。

問 3 固有値は 1 と .5。固有値 .5 の成分は消え、1 の成分が残ります。初期値が確率ベクトルなら、極限は $(.6, .4)^\top$ です (5 ページ)。

追加問 A：列の順序

$P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ を使って本文の A を対角化するとき、 D' を求めてください。

追加問 B：負の固有値

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値・固有方向を求め、 B^{2m} と B^{2m+1} を求めてください。

追加問 C：収束までの回数

5 ページの C で $x_0 = (1,0)^\top$ とします。 $|u_m - .6| \leq .01$ となる最小の非負整数 m を求めてください。

追加問題の解答

A 第 1 列は固有値 1、第 2 列は固有値 3 に対応するので、 $D' = \text{diag}(1, 3)$ です。

B 固有値 1 の方向は $(1,1)^\top$ 、固有値 -1 の方向は $(1,-1)^\top$ 。 $B^2 = I$ なので、 $B^{2m} = I$ 、 $B^{2m+1} = B$ です。例えば $(1,0)^\top$ からは 2 状態を交互に行き来し、収束しません。

C $|u_m - .6| = .4 \cdot 2^{-m}$ なので、 $2^m \geq 40$ が必要です。 $2^5 = 32 < 40 \leq 64 = 2^6$ より、最小値は $m = 6$ です。

計算の確認： P の列と D の順序をそろえる。 $AP = PD$ を確かめる。累乗公式には $m = 0, 1$ を代入する。長期挙動は固有値だけでなく、初期成分と対角化可能性も確認する。