幾何特論I（３次元多様体）

小沢 誠

目 次

1 多様体の定義

定義 1.1 (位相空間) 集合 X と X の部分集合族 $\mathcal{O}$ の組 $(X, \mathcal{O})$ が次を満たすとき、$(X, \mathcal{O})$ を**位相空間**という。

1. $X \in \mathcal{O}$ かつ $\emptyset \in \mathcal{O}$
2. $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$
3. $\{O_\lambda \in \mathcal{O}\}_{\lambda \in \Lambda}$ ならば $\cup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

定義 1.2 (Hausdorff 空間) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が次を満たすとき、$(X, \mathcal{O})$ を **Hausdorff 空間**という。

- $x, y \in X \ (x \neq y)$ に対し、$x \in O_x \in \mathcal{O}$ と $y \in O_y \in \mathcal{O}$ が存在して、$O_x \cap O_y = \emptyset$

定義 1.3 (基底) 位相 $\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathcal{B}$ が次を満たすとき、$\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}$ の**基底**という。

- 任意の $O \in \mathcal{O}$ は $O = \cup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda,\ B_\lambda \in \mathcal{B}$ と表される。

定義 1.4 (同相) 位相空間 $(X, \mathcal{O}),\ (\mathcal{X}', \mathcal{O}')$ に対して、写像 $f : X \to X'$ が次を満たすとき、f を**同相写像**という。

1. f は全単射
2. f および f' は連続

同相写像 $f : X \to X'$ が存在するとき、$(X, \mathcal{O})$ と $(X', \mathcal{O}')$ は**同相**であるという。

定義 1.5 ((位相的)n 次元多様体) 位相空間 X が次を満たすとき、X を**(位相的)n 次元多様体**という。

1. X は *Hausdorff* 空間
2. X は可算基底を持つ
3. 各点 $x \in X$ に対して、開集合 $x \in O \in \mathcal{O}$ が存在して、O は $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$ に同相

$\mathbb{R}^n_+$ に同相な近傍を持つ点 $x \in X$ から成る集合を X の**境界**といい、∂X で表す。$X - \partial X$ を X の**内部**といい、$int(X)$ で表す。X がコンパクトかつ $\partial X = \emptyset$ を満たすとき、X を**閉**という。

練習問題 1.6 (**n 次元球面, n 次元球体**) 次を示せ。

1. $S^n = \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$ は n 次元多様体
2. $B^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ は n 次元多様体
3. $\partial B^n = S^{n-1}$

S^n を n 次元球面、B^n を n 次元球体という。特に、S^1 を円周（ループ）、B^1 を弧（アーク）、B^2 を円盤（ディスク）という。

定義 1.7 (**n-単体**) 集合 $\Delta^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1 + \cdots + x_{n+1} = 1, x_i \geq 0\ (i = 1, \cdots, n+1)\}$ を n-**単体**という。$\{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1 + \cdots + x_{n+1} = 1\}$ は n 次元部分空間であるので、Δ^n の**次元**は n である。Δ^n の部分集合で、いくつかの座標成分を 0 にして得られる単体を**面**という。次元 0 の面を**頂点**という。

定義 1.8 (**単体的複体**) 単体から成る集合 K が次を満たすとき、**単体的複体**という。

1. それぞれの単体の各面は線型的同相写像で貼り合わされている
2. K の各点は有限個の単体のみで交わる近傍を持つ

定義 1.9 (**三角形分割**) 空間 M から、ある単体的複体への同相写像を M の**三角形分割**という。

例 1.10 Δ^n の 2 つのコピーを、それらの境界を恒等写像によって同一視して得られる空間は、単体的複体である。これは n-次元球面の三角形分割を与えている。

定義 1.11 (**細分**) 単体的複体 K に対して、もう一つの単体的複体 L が次を満たすとき、L を K の**細分**という。

1. L は空間として K と同じ
2. L の各単体はアファイン包含写像によって K のある単体に含まれる

定義 1.12 (**PL 写像**) 単体的複体間の写像 $f : K \to L$ が次を満たすとき、**PL** という。

1. K と L の分割 K', L' が存在
2. f は K' の頂点を L' の頂点に移す

3. f は K' の各単体を L' のある単体上に線型的に（同相的とは限らない）移す

従って、２つの単体的複体の間に PL 写像が存在するための必要十分条件は、それらが共通の細分を持つことである。

練習問題 1.13 次を示せ。

1. ２つの PL 写像の積は再び PL になる。
2. 単体的複体と PL 写像はカテゴリーを成す。すなわち、結合律が成り立ち、恒等写像が存在する。

定義 1.14 (PLn 次元多様体) 単体的複体が次を満たすとき、**PLn 次元多様体**という。

- 各点は B^n に PL 同相な近傍を持つ。

定理 1.15 (Moise) 位相的 3 次元多様体は、ちょうど１つの PL 構造を許容する。

注 1.16 この定理は 4 以上の次元では成り立たない。

定義 1.17 (単体の向き) n-単体の**向き**とは、次のように定めた頂点上の順序の同値類である。

- 異なる順序が同じ向きを定める。 $\Longleftrightarrow$ それらの順序が偶置換で移り合う。

頂点が $v_0, \cdots, v_n$ のように順序付けられているとき、この向きを $[v_0, \cdots, v_n]$ で表す。これは、v_i に対面する面上の向き $(-1)^i[v_0, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_n]$ を誘導する。

定義 1.18 (多様体の向き) n 次元多様体 M の各 n-単体の向き付けで、次を満たすものを M 上の**向き**という。

- σ を２つの n 単体に隣接した $(n-1)$-単体とするとき、これらの n-単体から誘導される σ の向きが一致しない

このとき、M は**向き付け可能**であるという。多様体の三角形分割が向きを持たないとき、**向き付け不可能**という。

注 1.19 コンパクト n-多様体 M が向き付け可能であるための必要十分条件は、$H_n(M, \partial M) = \mathbb{Z}$ であることである。ここで、向きは $H_n(M, \partial M)$ の基底の選び方であるから、向き付け可能性はコンパクト多様体の三角形分割の仕方に依らない。

定義 1.20 (ホモトピック) *2*つの連続写像 $h_0 : M \to N$ と $h_1 : M \to N$ が次を満たすとき、**ホモトピック**という。

- 連続写像 $H : M \times [0,1] \to M \times [0,1]$ が存在して、$H|_{M\times\{0\}} = h_0$ かつ $H|_{M\times\{1\}} = h_1$

定義 1.21 (アイソトピック) *2*つの同相写像 $h_0 : M \to N$ と $h_1 : M \to N$ が次を満たすとき、**アイソトピック**という。

- 同相写像 $H : M \times [0,1] \to M \times [0,1]$ が存在して、任意の i に関して $H|_{M\times\{i\}}$ は $M \times \{i\}$ の上への同相写像であり、$H|_{M\times\{0\}} = h_0$ かつ $H|_{M\times\{1\}} = h_1$

定義 1.22 (アンビエント・アイソトピック) M の部分集合 K_0 と K_1 が次を満たすとき、**アンビエント・アイソトピック**という。

- 同相写像 $h : M \to M$ が存在して、h は恒等写像にアイソトピックであり、$h(K_0) = K_1$

定義 1.23 (埋め込み) X を n 次元多様体、Y を $m(\leq n)$ 次元多様体とする。連続写像 $f : Y \to X$ が次を満たすとき、**埋め込み**という。

- $f : Y \to f(Y)$ が同相写像

また、埋め込み $f : Y \to X$ が次を満たすとき、**適切**という。

- $f(\partial Y) \subset \partial X$ かつ、$f(intY) \subset intX$

2　2次元多様体

定義 2.1 (群の空間への作用) X を位相空間、G を群とする。写像 $G \times X \to X, (g, x) \mapsto g \cdot x$ が次を満たすとき、G は X に**作用する**といい、X を G-**空間**という。

1. 単位元 $e \in G$ と任意の点 $x \in X$ に対し、$e \cdot x = x$
2. $g, h \in G$ 及び $x \in X$ に対し、$g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$
3. 任意の $g \in G$ に対し、写像 $X \to X, x \mapsto g \cdot x$ が連続

定義 2.2 (商空間) 群 G が位相空間 X に作用するとき、X に同値関係 $\sim$ を次のように定義できる。

- $x \sim y \iff g \in G$ が存在して $g \cdot x = y$

同値類全体から成る集合を X/G と表す。標準的全射 $X \to X/G$ による商位相を持つ位相空間 X/G を X の G による**商空間**という。

練習問題 2.3 X を G-空間とする。このとき、任意の $g \in G$ に対し、写像 $X \to X, x \mapsto g \cdot x$ は同相写像であることを示せ。

定義 2.4 (基本領域) X を G-空間とする。X の閉集合 V が次を満たすとき、G の X への作用の**基本領域**という。

1. $X = \cup_{g \in G} g \cdot V$
2. $g \neq e \in G$ ならば $g \cdot int(V) \cap int(V) = \emptyset$

例 2.5 (トーラス, 射影平面)

- $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の $\mathbb{R}^2$ への作用を $(m, l) \cdot (x, y) = (m + x, l + y)$ で定める。これは、平面の平行移動である。商空間 $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ を**トーラス**といい、T^2 で表す。T^2 は閉 2次元多様体である。例えば、$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x, y \leq 1\}$ が基本領域である。従って、この基本領域の境界を貼り合わせるとトーラスが得られる。特に、$\mathbb{R}^2$ は T^2 の普遍被覆空間であり、被覆変換群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ は T^2 の基本群 $\pi_1(T^2)$ と同型である。$\pi_1(T^2)$ の生成元は m, l で与えられ、$\pi_1(T^2) \cong \langle m, l | [m, l] = e \rangle$ という表示を持つ。ここで、$[m, l] = m^{-1} l^{-1} ml$ は m と l の交換子とする。また、トーラスは直積空間 $S^1 \times S^1$ の構造を持つことに注意する。

- $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ の S^2 への作用を $\pm 1 \cdot \vec{x} = \pm \vec{x}$ で定める。これは、球面の各点を対心点に移す写像である。商空間 $S^2/\mathbb{Z}_2$ を**射影平面**といい、P^2 で表す。P^2 は閉 *2* 次元多様体である。例えば、$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ が基本領域である。従って、この基本領域の境界を貼り合わせると射影平面が得られる。特に、S^2 は P^2 の普遍被覆空間であり、被覆変換群 $\mathbb{Z}_2$ は P^2 の基本群 $\pi_1(P^2)$ と同型である。$\pi_1(P^2)$ の生成元は m で与えられ、$\pi_1(P^2) \cong \langle m | m^2 = e \rangle$ という表示を持つ。

定義 2.6 (連結和) $X_1,\ X_2$ を *2* 次元多様体とし、$D_1 \subset X_1,\ D_2 \subset X_2$ を円盤とする。$X_1' = X_1 - int(D_1),\ X_2' = X_2 - int(D_2)$ とおく。$\partial X_1' = \partial D_1,\ \partial X_2' = \partial D_2$ であるから、$X_1',\ X_2'$ の境界は円周である。同相写像 $\partial X_1' \to \partial X_2'$ によって $X_1' \cup X_2'$ に同値関係 $\sim$ を入れ、標準的全射 $X_1' \cup X_2' \to (X_1' \cup X_2')/\sim$ から定まる商位相を入れる。この結果得られる位相空間 $(X_1' \cup X_2')/\sim$ は再び *2* 次元多様体になり、これを X_1 と X_2 の**連結和**といい、$X_1 \# X_2$ で表す。

定義 2.7 (種数 g の閉曲面)

1. g 個のトーラスの連結和 $F_g = T_1^2 \# \cdots \# T_g^2$ を**種数 g の向き付け可能閉曲面**という。$F_0 = S^2$ とする。
2. h 個の射影平面の連結和 $N_h = P_1^2 \# \cdots \# P_h^2$ を**種数 h の向き付け不可能閉曲面**という。

練習問題 2.8 次を示せ。

1. $X = X_1 \# X_2$ のとき、$\chi(X) = \chi(X_1) + \chi(X_2) - 2$
2. $\chi(F_g) = 2 - 2g$
3. $\chi(N_h) = 2 - h$
4. $P^2 \# T^2 = P^2 \# P^2 \# P^2$

定理 2.9 (閉 2 次元多様体の分類) 閉 *2* 次元多様体は、ちょうど一つの g に対して F_g と同相か、ちょうど一つの h に対して N_h と同相である。

定義 2.10 (種数 g の穴空き曲面)

1. F_g から b 個のディスクの内部を取り除いた曲面を $F_{g,b}$ で表す。
2. N_h から b 個のディスクの内部を取り除いた曲面を $N_{h,b}$ で表す。

$F_{0,1}$ はディスク B^2 である。$F_{0,2}$ を**アニュラス**、$F_{0,3}$ を**パンツ**という。一般に、$F_{0,i}$ を**平面的曲面**という。

定理 2.11 (コンパクト 2 次元多様体の分類) コンパクト 2 次元多様体はちょうど一つの $g \geq 0,\ b \geq 0,\ h \geq 1$ に対し、$F_{g,b}$ 又は $N_{g,b}$ と同相である。

例 2.12 アニュラス A は向き付け可能であるが、メビウスの帯 M は向き付け不可能である。実際、$H_2(A, \partial A) \cong \mathbb{Z},\ H_2(M, \partial M) \cong \{0\}$ である。M と A はホモトピー同値であることに注意する。

定義 2.13 (本質的 1 次元多様体) F を *2* 次元多様体とし、α を F に適切に埋め込まれたループとする。α が次を満たすとき、**非本質的**という。

- F 内のディスク D で、$\partial D = \alpha$ となるものが存在する。

非本質的でないループを**本質的**という。次に、F を境界付きの *2* 次元多様体とし、α を F に適切に埋め込まれた弧とする。α が次を満たすとき、**非本質的**という。

- F 内のディスク D で、$\partial D = \alpha \cup \beta$、$\alpha \cap \beta = \partial\alpha = \partial\beta$、$\beta$ は ∂F 内の弧となるものが存在する。

非本質的でない弧を**本質的**という。

定義 2.14 (両側) F を *2* 次元多様体とし、α を F に適切に埋め込まれた *1* 次元多様体とする。α が次を満たすとき、**両側**という。

- $N(\alpha)$ が $\alpha \times I$ に同相

両側でない *1* 次元多様体を**片側**という。

定義 2.15 (分離的) F を *2* 次元多様体とし、α を F に適切に埋め込まれた *1* 次元多様体とする。α が次を満たすとき、**非分離的**という。

- $F - \alpha$ が連結

非分離的でない *1* 次元多様体を**分離的**という。

例 2.16

1. S^2 内に適切に埋め込まれたループは非本質的、両側かつ分離的である。

2. $S^1 \subset S^2$ の商空間として得られる、P^2 に適切に埋め込まれたループ $S^1/\mathbb{Z}_2 \subset S^2/\mathbb{Z}_2$ は本質的、片側かつ非分離的である。
3. $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2$ の商空間として得られる、T^2 内に適切に埋め込まれたループ $\mathbb{R}^1/\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ は本質的、両側かつ非分離的である。
4. P^2、T^2 内には本質的かつ分離的なループは存在しない。
5. アニュラス A に適切に埋め込まれた弧 α で、α が ∂A の異なる成分を繋ぐとき、本質的である。
6. *2* 次元多様体 F 内に適切に埋め込まれた *1* 次元多様体 α が片側ならば、非分離的である。
7. *2* 次元多様体 F 内に適切に埋め込まれた *1* 次元多様体 α が非分離的ならば、本質的である。

定義 2.17 (階層) F、F_i $(i = 1, \ldots, n+1)$ をコンパクトな *2* 次元多様体（曲面）とし、α_i $(i = 1, \ldots, n)$ を F_i に適切に埋め込まれた連結な本質的 *1* 次元多様体とする。これらの組の列 $(F_1, \alpha_1), \cdots, (F_n, \alpha_n)$ が次を満たすとき、F の**階層**という。

1. $F = F_1$
2. F_{i+1} は F_i を α_i に沿って切り開いて得られる *2* 次元多様体 $(i = 1, \cdots, n)$
3. F_{n+1} の連結成分は全てディスク

練習問題 2.18 任意の *2* 次元多様体が階層を持つことを示せ。

補題 2.19 P を *2* 次元球面から b 個の *2* 次元円盤の内部を取り除いた曲面とし（但し $b > 1$）、$(P_1, \alpha_1), (P_2, \alpha_2), \ldots, (P_n, \alpha_n)$ を P の階層とする。このとき、P_{n+1} の連結成分の個数を d とすると、$d \leq b - 1$ である。

3　3次元多様体

定義 3.1 (3 次元球体) $B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ を *3* 次元単位球体という。B^3 に同相な *3* 次元多様体を **3 次元球体**という。

定義 3.2 (トーラス体) 単位円周 S^1 と *2* 次元円盤 B^2 との直積空間 $S^1 \times B^2$ を**トーラス体**という。境界 $\partial(S^1 \times B^2) = S^1 \times \partial B^2 = S^1 \times S^1$ はトーラスである。

定義 3.3 (ハンドル体) *3* 次元球体 B^3 の境界上に、互いに交わらない $2g$ 個の円盤をとる。これら $2g$ 個の円盤を、向きを逆にする同相写像で貼り合わせて得られる境界付き *3* 次元多様体を**種数** g **のハンドル体**といい、H_g で表す。

練習問題 3.4

1. 種数 1 のハンドル体 H_1 はトーラス体であることを示せ。
2. ∂H_g は F_g に同相であることを示せ。
3. H_1 の基本群 $\pi_1(H_1)$ は無限巡回群 $\mathbb{Z}$ に同型であることを示せ。
4. 一般に、$\pi_1(H_g)$ は階数 g の自由群であることを示せ。

定義 3.5 (3 次元球面) $S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ を *3* 次元単位球面という。S^3 に同相な *3* 次元多様体を **3 次元球面**という。

練習問題 3.6

1. S^3 は二つの *3* 次元球体を、その境界で貼り合せて得られることを示せ。
2. S^3 は二つのトーラス体を、その境界で貼り合せて得られることを示せ。
3. S^3 は二つのハンドル体を、その境界で貼り合せて得られることを示せ。

定義 3.7 (レンズ空間) V_1 と V_2 をトーラス体とし、m_i と l_i をそれぞれ V_i のメリディアンとロンジチュードとする。ここで、m_i と l_i は $\pi_1(\partial V_i)$ の生成元とみなせ、$\pi_1(\partial V_i) \cong \langle m_i \rangle \oplus \langle l_i \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ かつ $\pi_1(V_i) \cong \langle l_i \rangle \cong \mathbb{Z}$ である。p, q を互いに素な整数とし、写像 $\phi(m_2) = pl_1 + qm_1$ を考える。ϕ は ∂V_i に拡張し、$\phi_* : \partial V_2 \to \partial V_1$ を誘導する。ϕ_* によって V_1 と V_2 を境界で貼り合わせて得られる *3* 次元多様体を (p, q) 型の**レンズ空間**といい、$L(p, q)$ で表す。S^3 及び $S^2 \times S^1$ はレンズ空間と呼ばないこともある。

練習問題 3.8 次を示せ。

1. $L(1,q) \approx S^3$、$L(0,1) \approx S^2 \times S^1$、$L(2,1) \approx RP^3$
2. $L(p,q) \approx L(p,-q) \approx L(-p,q) \approx L(-p,-q) \approx L(p,q+kp)$
3. $\pi_1(L(p,q)) \cong \mathbb{Z}/p$

定理 3.9 (Brody) レンズ空間 $L(p,q)$ と $L(p',q')$ が同相である為の必要十分条件は、$p=p'$ かつ、$q \equiv \pm q'\ (mod\ p)$ 又は $qq' \equiv \pm 1\ (mod\ p)$ が成り立つことである。

定義 3.10 (積多様体) 円周 S^1 とコンパクトな曲面 F との直積空間 $S^1 \times F$ を S^1 と F との**積多様体**という。

例 3.11 (3 次元トーラス) F がトーラス $S^1 \times S^1$ のとき、積多様体 $S^1 \times F = S^1 \times S^1 \times S^1$ を **3 次元トーラス**という。

練習問題 3.12 *3*次元トーラスは二つの種数 *3* のハンドル体を、その境界で貼り合せて得られることを示せ。

定義 3.13 (クライン体) 積多様体 $B^2 \times I$ に向きを指定する。$B^2 \times \{0\}$ と $B^2 \times \{1\}$ を向きを保存する同相写像で貼り合せて得られる *3*次元多様体を**クライン体**という。

定義 3.14 M を *3*次元多様体とし、α を M 内の単純閉曲線、$N(\alpha)$ をその正則近傍とする。このとき $N(\alpha)$ はトーラス体かクライン体となる。$N(\alpha)$ がトーラス体のとき、α を**向きを保存する単純閉曲線**といい、$N(\alpha)$ がクライン体のとき、α を**向きを逆にする単純閉曲線**という。

定理 3.15 *3*次元多様体 M が向き付け可能であるための必要十分条件は、M 内の任意の単純閉曲線が、向きを保存することである。

定理 3.16 M をコンパクトで向き付け可能な *3*次元多様体とする。このとき、以下は同値である。

- M が種数 g のハンドル体と同相
- M に適切に埋め込まれた g 個の互いに交わらない *2* 次元円盤 $D_1, D_2, \ldots, D_g$ が存在して、M を $D_1, D_2, \ldots, D_g$ で切り開いて得られる *3*次元多様体は、*3*次元球体に同相。

定義 3.17 (結び目・絡み目) $S_1^1 \cup \cdots \cup S_n^1$ の S^3 への埋め込み $f : S_1^1 \cup \cdots \cup S_n^1 \to S^3$、又は像 $f(S_1^1 \cup \cdots \cup S_n^1) \subset S^3$ を**絡み目**という。特に、$n = 1$ のとき、**結び目**という。

例 3.18 (結び目の補空間と外部) $K \subset S^3$ を結び目とする。$S^3 - K$ を K の**補空間**という。$S^3 - K$ は向き付け可能で連結な *3* 次元多様体であるが、境界を持たないのでコンパクトではない。K の正則近傍を $N(K)$ とし、$E(K) = S^3 - intN(K)$ とおく。$E(K)$ を K の**外部**という。$N(K)$ はトーラス体である。$E(K)$ はコンパクト、向き付け可能で連結な *3* 次元多様体である。

命題 3.19 M をコンパクト、向き付け可能で連結な *3* 次元多様体で、連結な境界を持ち、$H_2(M) = 0$ とする。また、F をコンパクト、向き付け可能で連結な *2* 次元多様体で、境界を持ち、M 内に適切に埋め込まれているとする。このとき、∂F が ∂M を分離するならば、F は M を分離する。

(証明) $M' = cl(M - N(F))$ とおく。完全系列 $H_2(M' \cap N(F)) \to H_2(M') \oplus H_2(N(F)) \to H_2(M)$ において、$H_2(M' \cap N(F)) = 0,\ H_2(N(F)) = 0,\ H_2(M) = 0$ であるから、$H_2(M') = 0$ である。また、完全系列 $H_3(M') \to H_3(M', \partial M') \to H_2(\partial M') \to H_2(M')$ において、$H_3(M') = 0,\ H_2(\partial M') = Z \oplus Z, H_2(M') = 0$ であるから、$H_3(M', \partial M') = Z \oplus Z$、従って、$H^0(M') = Z \oplus Z$ を得る。ここで、$rankH^0(M') = rankH_0(M')$ が成立するので、$H_0(M') = Z \oplus Z$ である。■

練習問題 3.20 $K \subset S^3$ を三葉結び目（*trefoil*）とする。

1. 一つ穴あきトーラス $F_{1,1}$ の S^3 への埋め込みで、$\partial F_{1,1} = K$ を満たすものが存在することを示せ。これを K の**ザイフェルト曲面**という。

2. トーラス T^2 の S^3 への埋め込みで、$T^2 \supset K$ を満たすものが存在することを示せ。これを K の**補間曲面**という。

3. ザイフェルト曲面 $F_{1,1}$ に関して、K の外部 $E(K)$ との交わり $F = F_{1,1} \cap E(K)$ を考える。F は境界が一つであり、$\partial E(K)$ を分離しない。従って、F も $E(K)$ を分離しない。∂F を K の**ロンジチュード**という。また、$N(K) = S^1 \times B^2$ とみなしたときの $\partial B^2 \times \{*\}$ を**メリディアン**という。

4. 補間曲面 T^2 に関して、K の外部 $E(K)$ との交わり $A = T^2 \cap E(K)$ を考える。A はアニュラスであるから、境界は二つある。よって、∂A

は $\partial E(K)$ を分離し、A は $E(K)$ 内で分離的である。A を**ケーブリング・アニュラス**という。

例 3.21 (同相ではないが、ホモトピー同値の例) トーラス T^2 上に二つの互いに交わらない単純閉曲線 $C_1,\ C_2$ で、T^2 上でディスクを張るものをとる。$C_1,\ C_2$ に $F_{1,1}$ のコピーを $F_{1,1}$ の境界に沿って貼り付ける。得られた空間を X は、以下で作る二つのコンパクト向き付け可能 *3* 次元多様体 M_1 と M_2 の両方にホモトピー同値である。

まず、T^2 と $F_{1,1}$ の二つのコピーを太らせ、$T^2 \times [0,1]$ と $F_{1,1} \times [0,1]$ の二つのコピーを得る。$\partial F_{1,1} \times [0,1]$ の二つのコピーを、それぞれ $N(C_1) \times \{0\}$ と $N(C_2) \times \{0\}$ に貼り合わせて得られる多様体を M_1 とする。また、$\partial F_{1,1} \times [0,1]$ の二つのコピーの一方を $N(C_1) \times \{0\}$ に、他方を $N(C_2) \times \{1\}$ に貼り合わせて得られる多様体を M_2 とする。

M_1 は三つのトーラスと F_3 のコピーを境界に持つ *3* 次元多様体であり、M_2 は二つのトーラスと F_2 の二つのコピーを境界に持つ *3* 次元多様体であるので、これらの多様体は同相ではない。但し、構成方法より、共に X とホモトピー同値である。

ところが、“殆ど全て”のホモトピー同値な閉 *3* 次元多様体は、実際に同相であると広く信じられている。その特別な場合が、次の予想である。

予想 3.22 (ポアンカレ予想 (Poincaré Conjecture)) S^3 にホモトピー同値な *3* 次元多様体は S^3 と同相である。

4　連結和

定義 4.1 (連結和) $M_1,\ M_2$ を *3* 次元多様体とし、$B_1 \subset M_1,\ B_2 \subset M_2$ を *3* 次元球体とする。$M_1' = M_1 - int(B_1),\ M_2' = M_2 - int(B_2)$ とおく。$\partial M_1' = \partial B_1,\ \partial M_2' = \partial B_2$ であるから、$M_1',\ M_2'$ の境界は *2* 次元球面である。同相写像 $\partial M_1' \to \partial M_2'$ によって $M_1' \cup M_2'$ に同値関係 $\sim$ を入れ、標準的全射 $M_1' \cup M_2' \to (M_1' \cup M_2')/\sim$ から定まる商位相を入れる。この結果得られる位相空間 $(M_1' \cup M_2')/\sim$ は再び *3* 次元多様体になり、これを M_1 と M_2 の**連結和**といい、$M_1 \# M_2$ で表す。

定義 4.2 (素) *3* 次元多様体 M が次を満たすとき、**素**であるという。

- $M = M_1 \# M_2$ ならば、$M_1 \approx S^3$ 又は $M_2 \approx S^3$

但し、S^3 は素ではないと定める。

定義 4.3 (既約) *3* 次元多様体 M が次を満たすとき、**既約**であるという。

- M 内の任意の *2* 次元球面 S に対し、M 内の *3* 次元球体 B が存在し、$\partial B = S$ を満たす。

定義 4.4 (分離的・本質的球面) S を *3* 次元多様体 M 内の *2* 次元球面とする。

- S が M を二つの部分に分けるとき、S を**分離的**といい、そうでないとき**非分離的**という。

- M 内の *3* 次元球体 B で、$\partial B = S$ となるものが存在するとき、S を**非本質的**といい、そうでないとき**本質的**という。

練習問題 4.5 次を示せ。

1. S^3 は既約であるが、素ではない。
2. $S^2 \times S^1$ は素であるが、既約ではない。
3. *3* 次元多様体 M（但し S^3 を除く）が既約ならば、M は素である。
4. *3* 次元多様体 M（但し $S^2 \times S^1$ を除く）が素ならば、M は既約である。

定理 4.6 (Kneser) S^3 を除く向き付け可能閉 *3* 次元多様体は、有限個の素な向き付け可能閉 *3* 次元多様体の連結和に分解される。

定理 4.7 (Milnor) S^3 を除く向き付け可能閉 *3* 次元多様体 M が二通りの素分解 $M_1 \# \cdots \# M_m$ 及び $N_1 \# \cdots \# N_n$ をもつとき、$m = n$ であり、必要ならば添え字を換えることにより、$M_i \approx N_i\ (i = 1, \ldots, m)$ である。

5 ヒーガード 分解

定義 5.1 (ヒーガード 分解) M を向き付け可能閉 *3* 次元多様体とする。M が次のように二つの種数 g のハンドル体 V_1 と V_2 に分解できるとき、(V_1, V_2) を M の**種数 g のヒーガード 分解**という。

- $M = V_1 \cup V_2$、$V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$

$F = \partial V_1 = \partial V_2$ を M の**ヒーガード 曲面**という。F は種数 g の向き付け可能閉曲面である。F を用いて、M のヒーガード 分解を $(V_1, V_2; F)$ と表すこともある。

$$g(M) = min\{g | M \text{ は種数 } g \text{ のヒーガード 分解を持つ }\}$$

を M の**ヒーガード 種数**という。

例 5.2

1. S^3 種数 0 のヒーガード 分解を持つ。
2. $L(p, q)$ は種数 1 のヒーガード 分解を持つ。
3. $S^1 \times S^1 \times S^1$ は種数 3 のヒーガード 分解を持つ。

練習問題 5.3 次を示せ。

1. M が種数 g のヒーガード 分解を持つならば、任意の整数 $g' \geq g$ について M は種数 g' のヒーガード 分解を持つ。

定理 5.4 (ヒーガード 分解の存在) 任意の向き付け可能閉 *3* 次元多様体はヒーガード 分解を持つ。

（証明）M を向き付け可能閉 3 次元多様体とし、K を M のある 3 角形分割とする。L を K の 0 次元単体及び 1 次元単体全体からなる K の部分複体とする。$V_1 = N(L)$、$V_2 = M - intV_1$ とおくと、(V_1, V_2) は M のヒーガード 分解となっている。

練習問題 5.5 上の証明において、V_1 及び V_2 はハンドル体であることを示せ。

6 圧縮不可能曲面

定義 6.1 (本質的円盤) M 内に適切に埋め込まれた *2* 次元円盤 D は、次を満たすとき**非本質的**であるという。

- ∂M 内の *2* 次元円盤 D' で $\partial D' = \partial D$ を満たすものが存在して、$D \cup D'$ は M 内のある *3* 次元球体の境界となっている

D が非本質的でないとき、D は**本質的**であるという。

定義 6.2 (本質的球面) M 内に適切に埋め込まれた *2* 次元球面 S は、次を満たすとき**非本質的**であるという。

- M 内に *3* 次元球体 B が存在して、$\partial B = S$ となっている

S が非本質的でないとき、S は**本質的**であるという。

定義 6.3 (圧縮不可能曲面) M を *3* 次元多様体とし、F を M 内に適切に埋め込まれた曲面又は ∂M 内に含まれる曲面とする。ただし、F は *2* 次元球面又は *2* 次元円盤ではないとする。

M 内に次を満たす *2* 次元円盤 D が存在するとき、D を F の**圧縮円盤（compressing disk）**といい、F は**圧縮可能（compressible）**であるという。

- $D \cap F = \partial D$、かつ ∂D は F 内で本質的

F が圧縮可能でないとき、F は**圧縮不可能（incompressible）**であるという。

2 次元円盤と *2* 次元球面に対しては、それらが本質的であるとき**圧縮不可能**、非本質的であるとき**圧縮可能**という。

定義 6.4 M 内の曲面 F が**単射（injective）**であるとは、$Ker(\pi_1(F) \to \pi_1(M))$ が自明のときをいう。

定理 6.5 F を *3* 次元多様体内に適切に埋め込まれた S^2 以外の両側曲面とする。このとき次は同値である。

1. F が圧縮不可能
2. F が単射

7　ザイフェルト 多様体

8　素分解定理

9　トーラス分解定理

10　デーン手術