シラバス参照[2026年度／数学特論７　／小沢　誠]

授業情報

開講年度	2026年度	開講箇所	教育学部
科目名	数学特論７		
担当教員	小沢　誠		
学期曜日時限	秋学期 01:金５時限		
科目区分	数学科	配当年次	３年以上
単位数	2		
使用教室		キャンパス	早稲田
科目キー	150600001S	科目クラスコード	01
授業で使用する言語	日本語		
授業方法区分	【対面】ハイブリッド（対面回数半数以上）		
コース・コード	MATX402L		
大分野名称	数学		
中分野名称	数学		
小分野名称	数学		
レベル	総仕上げ	授業形態	講義

シラバス情報

副題

埋め込み不可能性と障害の幾何学

授業概要

本講義では、トポロジーの重要なテーマである「単体的複体の埋め込み問題」を扱います。前半では、グラフの平面埋め込み（クラトフスキーの定理）から始め、ユークリッド空間への埋め込み可能性を判定するための基礎理論（ファン・カンペン障害やホモロジー群）を学びます。後半では、最新の研究成果に基づき、3次元空間への埋め込み障害となる「臨界的複体」や「多重分岐曲面」の理論へと進みます。具体的には、グラフと円周の直積に関連する複体の分類を行い、最終的に単体的複体の間の「埋め込み能力」による順序構造を導入して、埋め込み理論を体系的に理解することを目指します。

授業の到達目標

1. 基礎概念の習得: 単体、複体、重心細分といった基本用語を理解し、ジョルダン曲線定理などの基礎定理の意義を説明できる。

2. グラフの平面性: クラトフスキーの定理を用いて、グラフが平面に埋め込めるかどうかを判定できる。

3. 埋め込み障害の理解: オイラー標数やホモロジー群を用いて、高次元の複体が低次元の空間に埋め込めない理由を論理的に説明できる。

4. グラフと円周の直積から得られる臨界的複体が臨界的となる条件を理解し、その具体的な形状をイメージできる。

5. 順序構造の理解: 単体的複体の集合上の半順序構造と、それに基づく「臨界性」の定義を理解し、現代的な埋め込み理論の視点を獲得する。

事前・事後学習の内容

事前学習:各回のテーマに関連する参考文献（論文や解説記事）のイントロダクションや定義部分を読み、専門用語（例：多重分岐曲面、ヒーガード種数、半順序）の意味を確認しておく。特に後半は、直前の回で扱った具体例が次の回の理論の伏線となるため、流れを意識して予習すること。

事後学習:授業で扱った定理や分類結果について、ノートを見返しながら自分で図を描き、幾何学的な構造を納得するまで復習する。授業中に提示された未解決問題や発展的な話題について、自分なりに考察してみる。

授業計画

1: 第1回：導入 - 埋め込みの基礎
埋め込みの定義、ジョルダン曲線定理、ジョルダン-ブラウアーの分離定理。アレクサンダーの角付き球面の紹介。

2: 第2回：単体的複体の定義
単体、複体、多面体。重心細分と単体近似定理（概略）。

3: 第3回：クラトフスキーの定理（1）準備
平面的グラフ、オイラーの公式。K_5 と $K_{3,3}$ の非平面性の証明。

4: 第4回：クラトフスキーの定理（2）証明の概略
グラフのマイナー、部分分割。クラトフスキーの定理の主張と証明のアイデア。
5: 第5回：ユークリッド空間への埋め込み可能性
一般の位置。n次元複体は 2n+1 次元空間に埋め込めること。ファン・カンペン障害の紹介。
6: 第6回：ホモロジー群の定義と計算
単体的ホモロジー群の定義、鎖群、境界作用素。オイラー標数とベッチ数の関係。
7: 第7回：埋め込まれた部分多様体のホモロジー
S^3に埋め込まれた閉曲面（およびコンパクト部分多様体）の1次元ホモロジー群がねじれ（トーション）を持たないことの証明。
8: 第8回：多重分岐曲面の基礎
多重分岐曲面の定義。3次元球面に関して「臨界的」であることの意味。
9: 第9回：正則多重分岐曲面の種数
正則多重分岐曲面の定義。ヒーガード種数との関連。種数による複雑さの尺度。
10: 第10回：種数の評価と埋め込み障害
最大種数と最小種数の概念。これらが埋め込み可能性にどう関わるか。
11: 第11回：グラフと円周の直積（導入）
$K_5 \times S^1$ や $K_{3,3} \times S^1$ が3次元に埋め込めない直観的な理由。
12: 第12回：臨界的複体の具体例：$(G \times S^1) \cup H$ の分類
グラフ直積型複体 $(G \times S^1) \cup H$ が3次元球面に対し臨界的となるグラフ対 (G, H) の完全分類。
13: 第13回：埋め込みによる順序構造と「臨界性」の再定義
埋め込み可能性に基づく半順序構造の導入と、それを用いた臨界性の再定義および基本定理の証明。
14: 第14回：期末到達度確認試験
これまで学んだ定義、定理の適用、および臨界的複体の概念理解について問います。

教科書 指定なし（適宜プリントを配布）

参考文献 本講義では主に以下の論文に基づいた内容を扱います。（授業内で適宜解説を行います）

Kazufumi Eto, Shosaku Matsuzaki, Makoto Ozawa, An obstruction to embedding 2-dimensional complexes into the 3-sphere, Topology and its Appl. 198 (2016) 117--125.

Shosaku Matsuzaki, Makoto Ozawa, Genera and minors of multibranched surfaces, Topology and its Appl. 230 (2017) 621--638.

Mario Eudave-Munoz, Makoto Ozawa, Characterization of 3-punctured spheres in non-hyperbolic link exteriors, Topology and its Appl. 264 (2019) 300--312.

Kai Ishihara, Yuya Koda, Koya Shimokawa, Makoto Ozawa, Neighborhood equivalence for multibranched surfaces in 3-manifolds, Topology and its Appl. 257 (2019) 11--21.

Makoto Ozawa, A partial order on multibranched surfaces in 3-manifolds, Topology and its Appl. 272 (2020) 107074.

Mario Eudave-Munoz, Makoto Ozawa, The maximum and minimum genus of a multibranched surface, Topology and its Appl. 301 (2020) 107502.

Makoto Ozawa, Multibranched Surfaces in 3-Manifolds, J. Math. Sci. 255 (2021) 193--208. (English version of volume 498 of "Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI")

Mario Eudave-Munoz, Makoto Ozawa, Forbidden complexes for the 3-sphere, arXiv:2403.18279.

成績評価方法

割合		評価基準
試験:	60%	中間テスト・期末テストで評価します。
レポート:	30%	授業中に出したレポートで評価します。
平常点評価:	10%	出席で評価します。

備考・関連URL