幾何特論 II　まとめ　2005 年 1 月 14 日

定義

X を n 次元多様体、Y を $m(\leq n)$ 次元多様体とする。

- $\boxed{\text{連続写像 } f : Y \to X \text{ が埋め込み}}$ $\iff$ $f : Y \to f(Y)$ が同相写像
- $\boxed{\text{埋め込み } f : Y \to X \text{ が適切}}$ $\iff$ $f(\partial Y) \subset \partial X$ かつ $f(intY) \subset intX$

M を 3 次元多様体、F を M 内に適切に埋め込まれた曲面とする。

- $\boxed{F \text{ が } M \text{ 内で圧縮不可能}}$ $\iff$

  F がディスクのとき: $\nexists\ D \subset \partial M$: ディスク, $\nexists\ B \subset M$: 球体 s.t. $\partial B = F \cup D$

  F が球面のとき: $\nexists\ B \subset M$: 球体 s.t. $\partial B = F$

  F がそれ以外のとき: $\forall\ D \subset M$: ディスク s.t. $D \cap F = \partial D$ に対し、$\exists\ D' \subset F$: ディスク s.t. $\partial D = \partial D'$

- $\boxed{F \text{ が } M \text{ 内で境界圧縮不可能}}$ $\iff$
  $\forall\ D \subset M$: ディスク s.t. $D \cap F = \partial D \cap F = \alpha$ が F 内に適切に埋め込まれた弧で、$D \cap \partial M = \partial D - int\alpha$ が ∂M 内の弧 に対し、
  $\exists\ D' \subset F$: ディスク s.t. $\partial D' = \alpha \cup \beta$, $\alpha \cap \beta = \partial\alpha = \partial\beta$, β は ∂F 内の弧

- $\boxed{F \text{ が } M \text{ 内で境界平行}}$ $\iff$
  $\exists\ h : F \times [0,1] \to M$: 埋め込み
  s.t. $h(F \times \{0\}) = F$, $h(F \times [0,1]) \cap \partial M = h(\partial F \times [0,1] \cup F \times \{1\})$

- $\boxed{F \text{ が } M \text{ 内で本質的}}$ $\iff$
  F が圧縮不可能かつ境界圧縮不可能であり、境界平行でない

K を S^3 内の結び目、$E(K)$ を K の外部とする。

- $\boxed{K \text{ が自明な結び目}}$ $\iff$ $\exists\ S \subset S^3$: 球面 s.t. $K \subset S$
- $\boxed{K \text{ がトーラス結び目}}$ $\iff$ $\exists\ T \subset S^3$: 自明なトーラス s.t. $K \subset T$

- $\boxed{K\text{がサテライト結び目}}$ $\iff$ $\exists\, T \subset E(K)$: 本質的なトーラス
- $\boxed{K\text{が双曲結び目}}$ $\iff$ $E(K)$ 内に本質的なディスク、アニュラス、トーラスが存在しない
- $\boxed{K\text{が素な結び目}}$ $\iff$
  $\forall\, S \subset S^3$: 球面 s.t. $S \cap K =$2 点, $S^3 = B_1 \cup_S B_2$ に対し、
  $K \cap B_1$が B_1 内で自明な弧、又は、$K \cap B_2$が B_2 内で自明な弧
- $\boxed{K\text{が合成結び目}}$ $\iff$ Kが素でない

定理

- S^3 内に適切に埋め込まれた曲面は圧縮可能である。
- S^3 内に適切に埋め込まれた球面は S^3 を 2 つの球体に分ける。
- B^3 内に適切に埋め込まれた曲面は非本質的である。
- ハンドル体内に適切に埋め込まれた閉曲面は圧縮可能である。
- ハンドル体内に適切に埋め込まれた本質的曲面はディスクのみである。
- Kが自明な結び目である。
  $\iff$ $\exists\, D \subset S^3$: ディスク s.t. $\partial D = K$
  $\iff$ $\partial E(K)$が $E(K)$ 内で圧縮可能である。
  $\iff$ $E(K)$がトーラス体である。
- Kがトーラス結び目である。
  $\iff$ $\exists\, A \subset E(K)$: 本質的なアニュラス
  s.t. $E(K) = V_1 \cup_A V_2$, $V_1 \cap V_2 = A$, V_1 と V_2 はトーラス体
- Kが合成結び目
  $\iff$ $\exists\, A \subset E(K)$: 本質的なアニュラス
  s.t. ∂Aの各成分は $N(K)$ のメリディアン
- Kを交代結び目とし、Fを $S^3 - K$ 内の圧縮不可能な閉曲面とする。このとき、$\exists\, D \subset S^3$: ディスク s.t. $D \cap F = \partial D$, $D \cap K =$1 点