

# A property of diagrams of the trivial knot

小沢 誠 (駒澤大学総合教育研究部自然科学部門)

$K$  を  $S^3$  内の結び目とし、 $K$  の  $S^2$  上の正則表示  $\pi(K)$  を考える。正則表示  $\pi(K)$  が I-既約 (resp. II-既約) であるとは、 $\pi(K)$  の交点数がライデマイスター移動 I (resp. ライデマイスター移動 II) で減らせないときをいう。正則表示  $\pi(K)$  が素であるとは、少なくとも1つの交点を含み、交点以外の2点で交わる任意のループ  $l$  に対して、 $S^2$  内のディスク  $D$  が存在し、 $D \cap \pi(K)$  が1本のアークから成るときをいう。

次のメナスコの方法に従って  $K$  を置く ([1])。  $\pi(K)$  の各交点  $c_i$  に対して、上交点と下交点の間に小さい3次元球体  $B_i$  (バブル) を挿入し、 $N(c_i; K)$  の上弧を  $\partial B_i$  の上半球面  $\partial_+ B_i$  上に、下弧を  $\partial B_i$  の下半球面  $\partial_- B_i$  上にイソトープする。 $S^2$  から各赤道上のディスク  $B_i \cap S^2$  を上半球面  $\partial_+ B_i$  (resp. 下半球面  $\partial_- B_i$ ) に置き換えて得られる2次元球面を  $S_+^2$  (resp.  $S_-^2$ ) とする。 $P = S_+^2 \cap S_-^2$  とおく。 $P - \pi(K)$  の各成分を領域と呼ぶ。 $B$  を全てのバブルの和とし、 $R$  を全ての領域の和とする。

$l$  を  $S_+^2 - K$  (resp.  $S_-^2 - K$ ) に埋め込まれたループとする。各領域  $R_j$  に対して、 $l \cap R_j$  の各成分は  $\partial B \cap R_j$  の異なるアーク成分を繋ぐアークであり、かつ、各バブル  $B_i$  に対して、 $l \cap \partial B_i$  の各成分は異なる領域を繋ぐアークであるとき、 $l$  を +-メナスコループ (resp. --メナスコループ) と呼ぶ。

2つの交点  $c_i$  と  $c_j$  が隣接であるとは、2つのバブル  $B_i$  と  $B_j$  を繋ぐ  $K \cap P$  のアーク  $\gamma$  が存在するときをいい、+-隣接 (resp. --隣接) であるとは、 $\gamma$  が2つの上弧  $K \cap \partial_+ B_i$  と  $K \cap \partial_+ B_j$  (resp. 2つの下弧  $K \cap \partial_- B_i$  and  $K \cap \partial_- B_j$ ) を繋ぐときをいう。

定理 ([2]) . 自明な結び目の任意の I-既約、II-既約、素な正則表示には、 $2n$  個の交点  $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$  を通る  $\pm$ -メナスコループで、 $n \geq 2$  かつ  $i = 1, \dots, n-1$  について  $c_{2i-1}$  は  $c_{2i}$  に  $\pm$ -隣接であるものが存在する。

参考文献 .

- 1 W. Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, Topology **23** (1984) 37–44.
- 2 M. Ozawa, *A property of diagrams of the trivial knot*, preprint available in <http://arxiv.org/abs/math.GT/0606293>.

例．この自明な結び目の正則表示は落合豊行氏によるものである。任意の  $r \geq 0$  に対して、 $r$ -ウェーブを持たない正則表示となっている。変形の各段階で、定理の条件を満たす  $\pm$ -メナスコループが存在するか、又は I-既約でないか、II-既約でない。前者の場合は、もし  $\pm$ -メナスコループが 3つの連続する隣接した交点を通るならば、正則表示は簡略化される。後者の場合は、ライデマイスター移動 I 又は II により交点を減らすことができる。

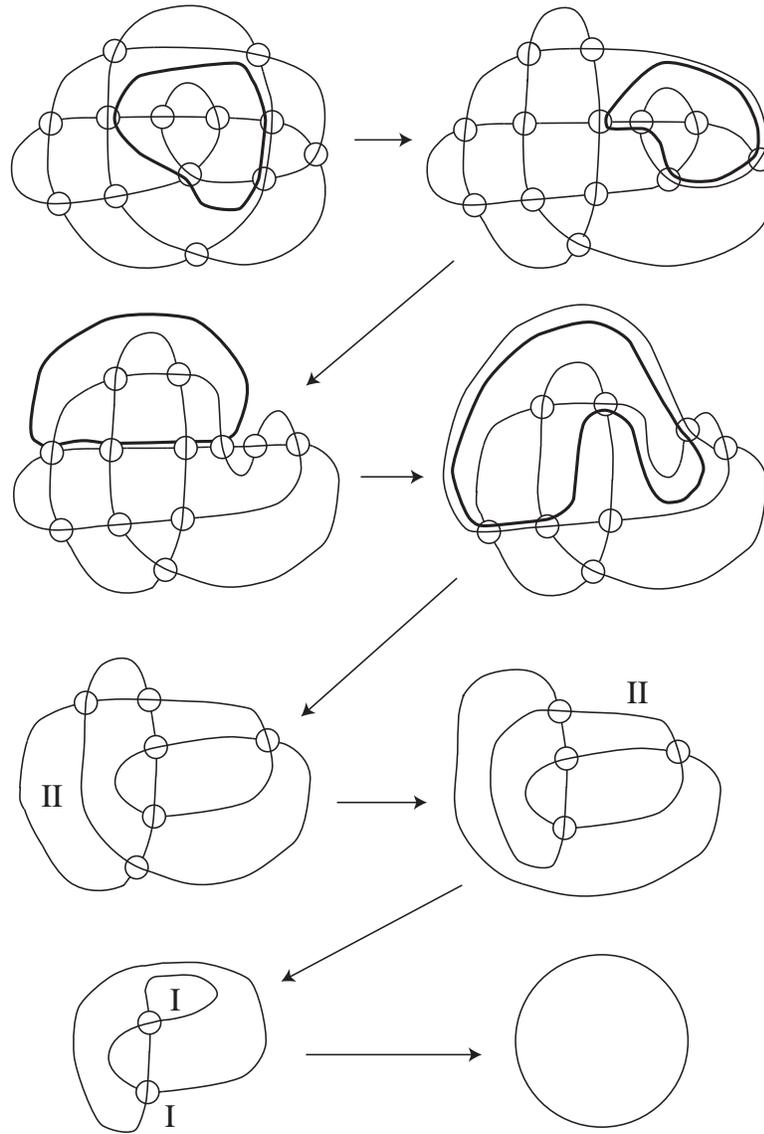


図 1: 落合の自明な結び目の“非自明な”正則表示