

Essential state surfaces for knots and links

小沢 誠 (駒澤大学総合教育研究部自然科学部門)

K を S^3 内の結び目または絡み目とし、 D を S^2 上の K の正則表示とする。 $\sigma : \{D \text{ の交点} \} \rightarrow \{+, -\}$ を D のステイトとする (図 2)。 D の交点数が n のとき、ステイトは 2^n 通りある。 σ に従って、図 1 のようにスムージングを行う。何故このように決めるかということ、局所的に向きを付けたときの交点の符号とその向きに沿ったスムージングに一致するからである。

このとき、 S^2 上にいくつかのループができる。各々のループに、互いに交わらないように S^2 の下側にディスクを張る。そして、境界が K となるように、半捻りのバンドを付けて得られる曲面を σ -state surface といい、 F_σ で表す (図 3)。(いくつかのループに、 S^2 の上側にディスクを張って曲面を得ることもできる。)

F_σ のディスクを頂点に、半捻りのバンドを符号付きの辺に対応させ、符号付きグラフ G_σ を得る (図 4)。切断点を持たない連結なグラフをブロックという。 G_σ はいくつかの極大なブロックへ一意的に分解される (図 5)。

D が σ -adequate であるとは、 G_σ がループを持たないときをいう。また、 D が σ -homogeneous であるとは、 G_σ の各ブロックにおいて全ての辺が同じ符号を持つときをいう。全ての結び目の任意の正則表示は、ある σ に対して、 σ -adequate (σ -homogeneous) であることに注意する。定義により、 D が semi-adequate または homogeneous ならば、ある σ に対して、 σ -adequate かつ σ -homogeneous である。従って、 σ -adequate かつ σ -homogeneous な正則表示を持つ結び目のクラスは、Montesinos、alternating、positive 結び目のクラスを含む。また、上手く正則表示を選ぶと、algebraic 結び目の殆どは σ -adequate かつ σ -homogeneous であることも分かる (図 6)。

定理 1 . D が σ -adequate かつ σ -homogeneous ならば、 F_σ は π_1 -essential である。

定理 2 . K を、I-reduced、 σ -adequate かつ σ -homogeneous な正則表示 D を持つ結び目または絡み目とする。このとき、 K が分離的 (自明、素) である為の必要十分条件は、 D が分離的 (自明、素) であることである。

参考文献 .

M. Ozawa, *Essential state surfaces for knots and links*, preprint available in <http://arxiv.org/abs/math.GT/0609166>.



图 1

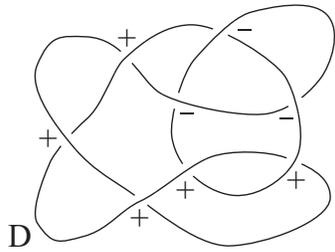


图 2

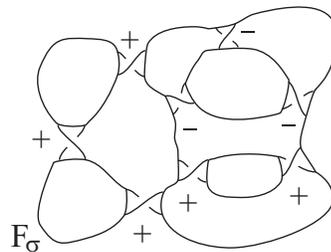


图 3

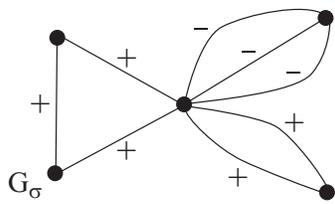


图 4

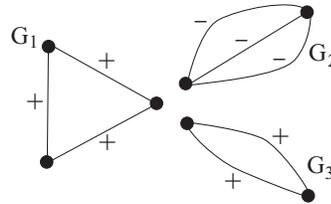


图 5

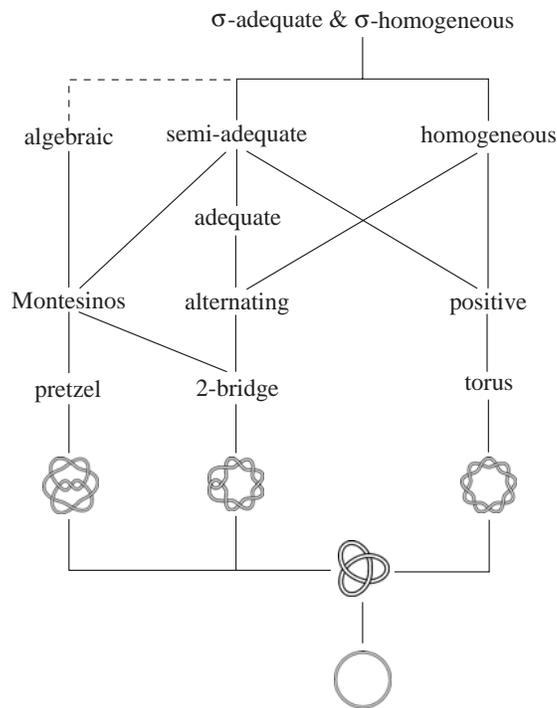


图 6